# CONCOURS INTERNE
# D'ATTACHÉ STATISTICIEN DE L'INSEE

## ANNÉE 2024

**Épreuve de Mathématiques et Statistiques**

**Durée : 4 heures**

**Coefficient 3**

**Le sujet comporte 8 pages (y compris celle-ci)**

- Tous documents et appareils électroniques sont interdits.
- L'épreuve est constitutée de trois parties indépendantes.
- Il sera tenu compte de la présentation, de la pertinence et de la clarté des justifications.

**Exercice 1** .................................................................... 6 pts

## Partie A

On considère les suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de $u_0$ et $u_1$ réels et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

On rappelle la convention : pour $A$ matrice carrée réelle d'ordre 2, $A^0 = I$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice $A$ telle que pour tout entier $n$, $U_{n+1} = AU_n$.
2. En déduire l'égalité $U_n = A^n U_0$ pour tout entier $n$.
3. Déterminer les valeurs propres de $A$ et les sous espaces propres associés.
4. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?
5. En déduire l'existence d'une matrice carrée $P$ d'ordre 2 inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Expliciter la matrice $P$.
6. Donner l'expression de $A^n$ en fonction de $P$ et $D$ pour tout entier $n$.
7. Pour tout entier $n$, calculer la première ligne de $A^n$.
8. En déduire qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a\,(-1)^n + b\,2^n.$$

   On donnera l'expression de $a$ et $b$ en fonction de $u_0$ et $u_1$.

## Partie B

On note $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des suites réelles.
On considère $E$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ constitué des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de $u_0, u_1$ et $u_2$ réels et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

1. Montrer que $E$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{S}$.
2. On note $C$ l'ensemble des suites réelles constantes. Montrer que $C$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
3. Soit $f$ l'application définie sur $E$ qui à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E$ associe la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Delta_n = u_{n+1} - u_n.$$
   (a) Montrer que $f$ est une application linéaire de $E$ dans $\mathcal{S}$.
   (b) Montrer que $Imf \subset E$ où $Imf$ désigne l'image de l'endomorphisme $f$.
4. Déterminer le noyau de $f$.

5. On considère $F$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ constitué des suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par la donnée de $d_0$ et $d_1$ réels et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+2} = d_{n+1} + 2d_n.$$

   Montrer que $Imf \subset F$.

6. Soit $d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $F$.

   On pose $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} d_k$.

   (a) Montrer que la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $E$.

   (b) Montrer que $f(v) = d$.

   (c) En déduire que $Imf = F$.

   (d) À l'aide de la partie A, donner la forme générale des suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $F$.

   (e) En déduire qu'il existe trois réels $\lambda$, $\mu$, et $\nu$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \lambda + \mu(-1)^n + \nu 2^n.$$

**Exercice 2** ............................................................ 6 pts

On rappelle les définitions et notations suivantes :

- $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls.
- Pour $n$ entier naturel, on note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre $n$ de $f$. On rappelle que la dérivée d'ordre 0 de $f$ est égale à $f$.
- $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ admettant des dérivées à tout ordre.
- On définit :
  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+) = \{$fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$sur $\mathbb{R}^+$vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) \geq 0 \,\text{sur}\, \mathbb{R}^+\}$.

## Partie A

Soit $f$ un élément de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$.

1. Déterminer le signe de $f$.
2. Déterminer la monotonie de $f$.
3. Déterminer la convexité de $f$.
4. Soient $f$ et $g$ deux éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$. Montrer que la somme $f+g$ appartient à $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$.
5. Soient $f$ et $g$ deux éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$. Montrer que le produit $f \times g$ appartient à $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$.
6. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(x)$. Montrer que $f$ appartient à $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$.

## Partie B

Dans toute la suite du problème $f$ désigne une fonction de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ et $x$ un réel strictement positif.

1. On pose pour tout entier $n$, $I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ .

   Montrer à l'aide d'une intégration par partie que pour $n \geq 1$ : $I_n = -\dfrac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + I_{n-1}$.
2. En déduire que pour tout entier $n$ :
   $$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$
   (formule de Taylor avec reste intégral).

   On pose alors pour tout entier $n$ :
   $R_n(x) = f(x) - f(0) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule démontrée en B-2, écrire $R_n(x)$ sous la forme d'une intégrale.
4. Montrer que $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
5. Montrer que $S_n(x) \leq f(x)$ pour tout entier $n$.
6. En déduire que $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et que sa limite notée $S(x)$ vérifie $S(x) \leq f(x)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout réel $z$ de $]0, +\infty[$, $R_n(z) \leq f(z)$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'un changement de variable approprié, montrer que

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ux)du.$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $z \mapsto \dfrac{R_n(z)}{z^n}$ est croissante sur $]0, +\infty[$. (On montrera que pour $z_1$ et $z_2$ éléments de $]0, +\infty[$ tels que $z_1 \leq z_2$ alors $\dfrac{R_n(z_1)}{z_1^n} \leq \dfrac{R_n(z_2)}{z_2^n}$).

10. En déduire que pour tout $z_1$ et tout $z_1$ éléments de $]0, +\infty[$ tels que $z_1 \leq z_2$

$$R_n(z_1) \leq \frac{z_1^n}{z_2^n} f(z_2).$$

11. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x) = f(x)$.

**Problème** ................................................................. 8 pts

### Partie A

Soient $\beta$ un réel stritement positif, $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes et suivant une même loi uniforme sur le segment $[0, \beta]$. On définit alors les variables suivantes :
- $m = \min(X, Y)$,
- $M = \max(X, Y)$.

1. Donner l'expression de la fonction de répartition de la variable $M$.
2. Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable $M$.
3. Justifier que la variable $M$ est à densité, puis donner son expression.
4. Représenter graphiquement la densité de la variable $M$.
5. Calculer $\mathbb{E}(M)$.
6. Justifier que $\mathbb{E}(m) = \beta - \mathbb{E}(M)$, puis calculer $\mathbb{E}(m)$.
7. Exprimer $|X - Y|$ en fonction de $m$ et $M$.
8. Calculer $\mathbb{E}(|X - Y|)$.
9. Est-ce que les variables $m$, $|X - Y|$ et $\beta - M$ sont indépendantes ? Justifier.
   *On admettra que ces trois variables suivent la même loi*

### Partie B

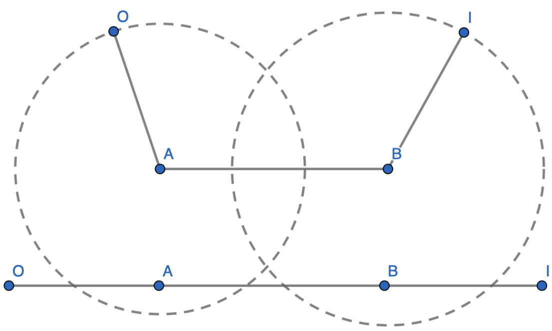
Soient trois nombres réels $a, b, c \in [0, 1]$ tels que $a + b + c = 1$. Montrer que :

$$\max(a, b, c) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq b + c \\ b \leq a + c \\ c \leq a + b \end{cases}$$

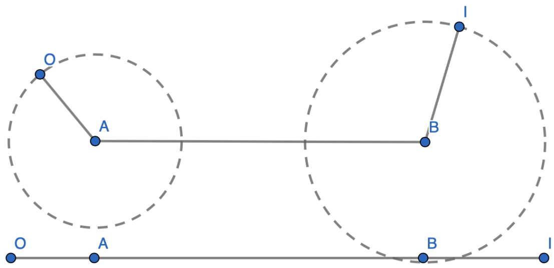
### Partie C

Un problème de probabilités géométriques se pose de la manière suivante :
« Une tige se brise en trois morceaux. Quelle est la probabilité que ces trois morceaux soient propres à former un triangle ? »
Par la suite, on représentera la tige par un ségment $OI$. Cette tige se brisera en les points $A$ et $B$.

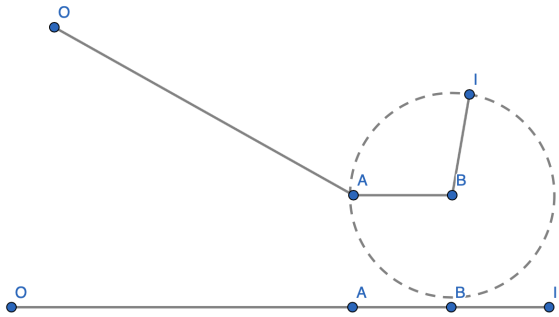
1. Parmi ces trois configurations géométriques, quelle est celle qui permet la construction d'un triangle, à partir des trois segments $OA$, $AB$ et $BI$ ? Justifier.




Configuration $P_1$




Configuration $P_2$

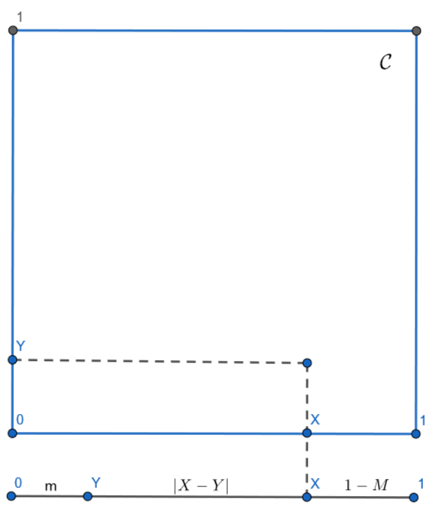



Configuration $P_3$

2. Parmi ces trois propositions, quelle est celle qui est juste ? Justifier.
   — « $Q_1$ - La construction du triangle est possible si au moins une des trois longueurs $OA$, $AB$, $BI$ est plus petite que la moitié de la longueur $OI$ . »
   — « $Q_2$ - La construction du triangle est possible si les trois longueurs $OA$, $AB$, $BI$ sont plus petites que la moitié de la longueur $OI$ . »
   — « $Q_3$ - La construction du triangle est possible si les trois longueurs $OA$, $AB$, $BI$ sont strictement plus grandes que le tiers de la longueur $OI$ . »

## Partie D

On va modéliser ce problème de probabilité géométrique. Il existe différentes manières de briser une tige de longueur 1 en trois morceaux.
Une première méthode consiste à choisir indépendamment deux nombres au hasard $X$ et $Y$ compris entre 0 et 1 (suivant la loi uniforme), puis reporter ces deux longueurs sur une tige modélisée par le segment $[0, 1]$. On brise alors la tige aux deux endroits ainsi marqués.
Cette méthode équivaut au choix d'un point $(X, Y)$ pris au hasard dans le carré unité.




1. Dans le carré unité noté $\mathcal{C}$, représenter graphiquement les trois ensembles de points définis par :

(a) $\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \in \mathcal{C} / \min(x,y) \leq \dfrac{1}{2}\}$ ;

(b) $\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \in \mathcal{C} / 1 - \max(x,y) \leq \dfrac{1}{2}\}$ ;

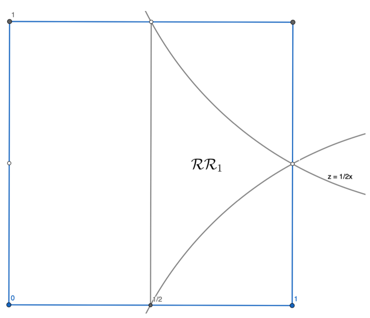
(c) $\mathcal{R}_3 = \{(x,y) \in \mathcal{C} / |x - y| \leq \dfrac{1}{2}\}$.

2. Quelle est l'aire de la zone contituée par l'intersection des trois ensembles $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$ ?
3. En déduire la probabilité que la tige brisée suivant cette méthode soit propre à former un triangle. Justifier.
4. Est-ce qu'on aurait pu utiliser un calcul direct pour déterminer cette probabilité à partir des éléments obtenues dans la Partie A ? Justifier.

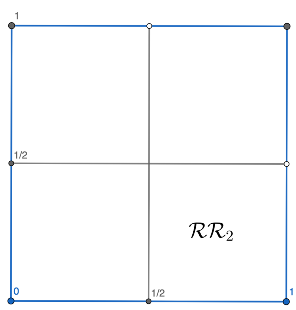
## Partie E

Pour briser cette tige, une deuxième méthode consiste à choisir un premier nombre au hasard $X$ compris entre 0 et 1 (suivant la loi uniforme). On choisit alors un deuxième nombre $Y$ pris au hasard entre 0 et $X$ (selon la loi uniforme). On brise alors la tige aux deux endroits ainsi marqués.

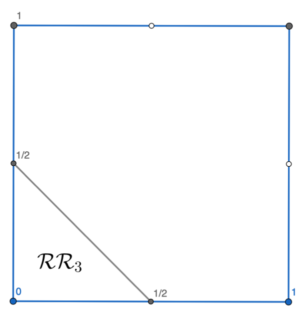
1. On notera $x$ le résultat du tirage de $X$, et $Y_x$ une variable aléatoire qui soit la loi uniforme sur le segment $[0, x]$.
   (a) Si $x \leq \dfrac{1}{2}$, quelle est la probabilité $p_x$ de pouvoir former un triangle avec les trois morceaux obtenus ?
   (b) Si $x > \dfrac{1}{2}$. Quelles sont les deux conditions sur $Y_x$ pour que les trois morceaux obtenus puissent former un triangle ?
   (c) On suppose que $x > \dfrac{1}{2}$. Montrer que la probabilté de former un triangle avec les trois morceaux est égale à $p_x = \dfrac{1-x}{x}$.
2. On admettra que la probabilité de former un triangle selon cette deuxième méthode est donnée par la formule $p = \displaystyle\int_0^1 p_x \, dx$.
   Calculer cette probabilité $p$.
3. On va retrouver ce résultat de manière géométrique.
   La deuxième méthode consiste en effet à choisir d'un point $(X, Z)$ pris au hasard et uniformément dans le carré unité, puis à briser la tige aux deux endroits marqués par les nombres $XZ$ et $X$.
   (a) Parmi ces trois propositions, quelle est la région qui représente les conditions pour que le triangle soit constructible ? Justifier.




$PP_1$




$PP_2$




$PP_2$

   (b) En calculant l'aire de la région que vous avez sélectionnée, retrouver le résultat obtenu dans la question précédente.