CONCOURS ADMINISTRATEUR EXTERNE DE L'INSEE

Session 2023

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6

Tous documents et appareils électroniques interdits

Tournez la page S.V.P

Partie 1 : algèbre-analyse

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.

Exercice 1

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes mais sont centrées autour d'une même thématique.

On note $V = M_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients complexes et $E = \mathbb{C}^n$ identifié à $M_{n,1}(\mathbb{C})$ ($n \geq 2$). On notera Tr la trace d'une matrice.

Une matrice N est dite *nilpotente* si et seulement s'il existe $q \geq 2$ tel que : $N^q = 0$.

1ère partie

Soit $A \in V, A \neq 0$. On appelle ϕ l'endomorphisme de V défini par : $\forall\, M \in V :\ \phi(M) = AM$.

1.
   a. Montrer que, si λ est valeur propre de ϕ, alors λ est valeur propre de A.
   b. Soit M_0 un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ.
   Montrer que, si $X \in E$ est vecteur propre de M_0 associé à une valeur propre non nulle, il est vecteur propre de A.
   c. Que peut-on dire de A lorsque M_0 n'admet pas 0 comme valeur propre ?

2.
   a. Réciproquement, montrer que, si λ est valeur propre de A, λ est valeur propre de ϕ et qu'il existe des vecteurs propres de ϕ de rang 1.
   b. Montrer que, si $Y \in E$ est vecteur propre de A, il existe une matrice M_0 de rang 1, vecteur propre de ϕ, dont Y est vecteur propre.
   c. À quelle condition I_n est-il vecteur propre de ϕ ?

3. Soit M_0 un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ.
   a. Montrer que, si la famille $(M_0, M_0^2, \dots, M_0^{n^2})$ est libre, alors : $A = \lambda I_n$.
   b. Dans le cas contraire, montrer qu'il existe $p \in \{2, \dots, n^2\}$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{C}^{p-1}$ tel que :
   $$M_0^p = \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k M_0^k.$$
   c. **Pour cette question seulement** : Si le sous-espace propre de ϕ associé à la valeur propre λ est de dimension 1 :
      i. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que : $M_0^2 = \alpha M_0$.
      ii. Montrer alors que : $Tr(M_0) = \alpha\, Rg(M_0)$.

4.
   a. Identifier les sous-espaces propres de ϕ.
   b. En déduire que, si A est diagonalisable, ϕ est diagonalisable.

2ème partie

Soit $A \in V$. On s'intéresse maintenant à l'endomorphisme ψ de V défini par :

$$\forall\, M \in V :\ \psi(M) = AM - MA.$$

5. À quelle condition *nécessaire et suffisante* portant sur A cet endomorphisme est-il nul ?

On suppose dans la suite que ψ n'est pas l'endomorphisme nul.

6.
    a. Donner deux vecteurs propres de ψ linéairement indépendants.
    b. Soit M_1 un vecteur propre de ψ associé à la valeur propre μ.
    Calculer $\psi(M_1^k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
    c. En déduire que, si $\mu \neq 0, M_1$ est nilpotente.
    d. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$: $P(X) = \sum_{k=0}^{q} \alpha_k X^k$.
    Démontrer la relation : $\psi[P(M_1)] = \mu\, M_1 P'(M_1)$, où :
    $$\forall\, M \in V : P(M) = \sum_{k=0}^{q} \alpha_k M^k.$$
    e. Que peut-on en déduire pour $P(A)$?

7. Si M_1 est un vecteur propre de ψ, que peut-on dire de M_1^{-1} ?

8.
    a. Si M_1 et M_2 sont deux vecteurs propres de ψ, associés aux valeurs propres μ_1 et μ_2, où l'on suppose que M_1 est inversible, que peut-on dire de $M_1 M_2$?
    b. En déduire que $M_1 M_2$ est vecteur propre de ψ pour la valeur propre $\boxed{\mu_2}$.

9. Montrer que, si A est nilpotente, ψ admet 0 comme unique valeur propre.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $\binom{n}{p}$ le coefficient du binôme : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
On définit la fonction f_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f_n(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

et on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

1. Montrer que l'intégrale définissant I_n est convergente.
2. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$.
3. Montrer que la série de terme général I_n est convergente.
4. On note $a_1, a_2, \dots, a_p$ les réels tels que : $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{a_p}{p+x}$.

   (a) Calculer, pour tout p de $[\![1, n]\!]$, a_p en fonction de p et de n.

   (b) Vérifier que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} a_p = 0$.

   (c) En déduire, sous forme de somme, la valeur de I_n.
5. (a) Établir, pour tout x de $[0, 1]$, l'encadrement suivant :

   $$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p+1} \leqslant -\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

   (b) En déduire le résultat suivant :

   $$\int_0^1 f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n!\ln(n)}$$
6. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt = nI_{n+1}$.
7. Déduire de ce qui précède la formule suivante :

   $$\sum_{p=0}^{n} (-1)^{p+1} \binom{n-1}{p} \ln(p+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln n}$$

Partie 2 : probabilités-statistiques

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants

Exercice 1

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, indépendantes et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et T le plus petit entier aléatoire k vérifiant $S_k > 1$, et on pose $T = -1$ si un tel indice n'existe pas.
C'est-à-dire que, pour tout ω de Ω :

$$T(\omega) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \ ; \ S_k(\omega) > 1\}$$

si cet ensemble est non vide et $T = -1$ si cet ensemble est vide.
On admet que T est bien une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. (a) Déterminer une densité de S_2, puis calculer $\mathbb{P}(S_2 \geqslant 1)$.
   (b) Montrer que la suite $(\mathbb{P}([S_n \geqslant 1]))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ non nul.
   (c) On pose $S'_n = \sum_{k=n+1}^{2n} X_k$.
   En considérant, pour tout entier n non nul les événements $(S_{2n} \geqslant 1)$, $(S_n \geqslant 1)$, $(S'_n \geqslant 1)$, montrer que $l \geqslant 2l - l^2$.
   (d) En déduire que $\mathbb{P}([T = -1]) = 0$.
2. Montrer que $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([S_n \leqslant x]) = \dfrac{x^n}{n!}$.
3. (a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, $\mathbb{P}(T > n)$.
   (b) En déduire la loi de T.
   (c) Calculer $\mathbb{E}(T)$.
4. (a) Justifier la relation suivante :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow \frac{1 - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \leqslant \alpha$$

   (b) Montrer que, pour tout réel α, $\ell \geqslant 1 - \Phi(\alpha)$ où Φ désigne la fonction de répartion de la loi normale centrée réduite.
   (c) Retrouver alors la valeur de $\mathbb{P}([T = -1])$.
5. On pose, pour tout entier naturel k non nul, $Y_k = -\ln(1 - X_k)$.
   Pour tout entier naturel n non nul, on pose $V_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Enfin, pour tout réel t strictement positif, on définit l'application Z_t de Ω dans $\mathbb{R}$ par :
   Pour tout ω dans Ω, $Z_t(\omega)$ est, s'il existe, le plus petit entier naturel n non nul tel que $V_n(\omega) > t$ et, on pose $Z_t(\omega) = -1$ si un tel entier n'existe pas.
   On admet que Z_t est une variable aléatoire définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et que, par une démonstration analogue à celle faite précédemment, on a $\mathbb{P}([Z_t = -1]) = 0$.
   (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, déterminer la loi de Y_k.
   (b) Quelle est la loi de la variable aléatoire V_n ?
   (c) Montrer que $Z_t - 1$ suit la loi de Poisson de paramètre t.

Exercice 2

1. On considère deux variables aléatoires ***indépendantes*** X et Y, suivant chacune la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
   On pose : $Z = \frac{X}{Y}$. On rappelle que la loi de Z est la *loi de CAUCHY*, de densité $\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+z^2}$.
   a. Déterminer la densité de la loi de $|Z|$.
   b. Déterminer la densité de la loi de Z^2.

On considère dans la suite du problème deux suites de variables aléatoires, $\{X_i\}$ et $\{Y_i\}$, toutes indépendantes entre elles et de même loi, admettant des moments d'ordre 2. On notera m leur espérance commune et $\sigma^2 (\neq 0)$ leur variance.

Pour tout entier naturel n, on pose : $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ et : $\overline{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$

Enfin, on définit la variable aléatoire : $T_n = \left|\frac{\overline{X}_n - m}{\overline{Y}_n - m}\right|$ (on suppose que cette variable est bien définie avec une probabilité égale à 1).

2. Étudier la convergence en loi, quand n tend vers $+\infty$, de la suite $\{T_n\}$.

   On rappelle que le rapport de deux suites de variables aléatoires, indépendantes entre elles et convergeant chacune en loi, converge en loi vers une loi limite qu'on peut calculer comme si les deux composantes du rapport avaient chacune une loi fixe (égale à leur propre limite).

3. On définit la variable aléatoire U_n comme suit :
   $$U_n = 1 \Leftrightarrow T_n < 1, U_n = 0 \text{ sinon.}$$
   On admet que $P\{T_n = 1\} = 0$.

   a. Calculer $\lim_{n \to +\infty} P\{U_n = 1\}$. Le résultat obtenu vous paraît-il intuitif ?
   b. En déduire la convergence en loi de la suite $\{U_n\}$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

4. On pose : $Z_n = U_n \overline{X}_n + (1 - U_n)\overline{Y}_n$.

   Étudier la convergence en probabilité de la suite $\{Z_n\}$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

► On suppose dorénavant que les variables X_i et Y_i suivent toutes la même loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On s'intéresse à la convergence en loi de la suite de terme général : $W_n = \sqrt{n}\,(Z_n - m)$.

5. En écrivant :
   $$W_n = \begin{cases} A_n \; si \; |A_n| < |B_n| \\ B_n \; si \; |B_n| < |A_n| \end{cases}, \text{ où : } A_n = \sqrt{n}\,(\overline{X}_n - m) \text{ et : } B_n = \sqrt{n}\,(\overline{Y}_n - m),$$
   calculer la fonction de répartition de W_n.

   On l'exprimera au moyen de la densité h et de la fonction de répartition H de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

   On remarquera que A_n et B_n sont indépendantes et jouent des rôles symétriques et on obtiendra le résultat en se ramenant au calcul de $P\{A_n < w$ et $|A_n| < |B_n|\}$, que l'on exprimera sous forme d'une intégrale double évaluée grâce au théorème de FUBINI.

6. En déduire la convergence en loi de la suite $\{W_n\}$ et identifier la loi limite au moyen de sa densité.

   Obtient-on un résultat de type théorème central limite ?

■ ■ ■ ■ ■ ■

CONCOURS ADMINISTRATEUR EXTERNE DE L'INSEE

SESSION 2023

COMPOSITION D'ÉCONOMIE

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 3 pages, numérotées de 1 à 3.

Tous documents et appareils électroniques interdits.

Tournez la page S.V.P.

Concours d'administrateur externe de l'INSEE
Epreuves écrites d'admissibilité
Avril 2023

Epreuve écrite d'économie
Durée de l'épreuve : 4h
Tous documents et appareils électroniques interdits

Dissertation (13 points)

Enjeux économiques d'une réforme du système de retraite français

La dissertation a pour objet de vérifier la capacité des candidats à mobiliser la théorie et les concepts micro- et macroéconomiques afin d'analyser des situations concrètes. Les candidats veilleront ainsi à montrer dans quelle mesure les outils de l'économiste permettent de penser les problèmes économiques actuels, et de leur apporter des solutions.

Exercice (7 points)

Cet exercice s'intéresse à la dynamique de l'inflation. Les candidats expliqueront soigneusement chacun de leurs résultats. La troisième partie de l'exercice (questions 6 à 8) peut être traitée indépendamment des précédentes. Les équations du modèle sont présentées sous une forme log-linéarisée. Par exemple, $w_t - p_t$ est le logarithme de $\frac{W_t}{P_t}$ où W_t est le salaire nominal et P_t le niveau moyen des prix.

Les firmes produisent des biens et des services vendus sur un marché concurrentiel. Ces biens et services sont produits en utilisant du travail et de l'énergie. Nous supposons que le marché de l'énergie est walrasien et l'offre d'énergie est exogène. En revanche, il existe des rigidités sur le marché du travail. Ainsi, le salaire nominal est le résultat d'une négociation entre syndicats et employeurs. Ce salaire n'assure pas nécessairement l'égalité entre l'offre et demande de travail.

La technologie de production de cette économie à la période t est résumée par l'équation suivante :

$$y_t = \frac{3}{4}l_t + e_t \quad (1)$$

où y_t, l_t et e_t représentent respectivement le PIB, l'emploi et l'énergie disponible pour produire des biens et services à la période t. La demande de travail est donnée par :

$$l_t^d = 4(p_t - w_t + e_t) \quad (2)$$

avec p_t et w_t le niveau moyen des prix et le salaire nominal. La demande agrégée de biens et services est donnée par :

$$y_t^d = m_t - p_t + \theta_t \quad (3)$$

où m_t et θ_t sont respectivement l'offre de monnaie et un choc de demande. En normalisant la population active à 1, le taux de chômage en t s'écrit :

$$u_t = 1 - l_t^d \quad (4)$$

La détermination du salaire nominal résulte des négociations entre les employeurs et les syndicats. En notant $\bar{u}$ le taux de chômage structurel, le salaire suit la dynamique suivante :

$$w_{t+1} = w_t - \alpha(u_t - \bar{u}) + \beta(p_t - p_{t-1}) \quad (5)$$

où les coefficients α et β sont compris entre 0 et 1. La politique monétaire de la banque centrale est donnée par :

$$m_{t+1} = m_t + \bar{m} \quad (6)$$

où $\bar{m}$ s'interprète comme le taux de croissance de l'offre de monnaie.

1. Quels comportements économiques permettent d'expliquer l'équation 5 d'évolution des salaires ? Comment interprétez-vous les paramètres α et β ?
2. Expliquer les comportements donnant des fondements économiques à la demande de travail (équation 2) et à la demande agrégée (équation 3) ? Comment justifier la présence du paramètre θ ?
3. En utilisant les équations 1 et 2, déterminez la fonction d'offre agrégée (y_t^s). Déduisez-en le niveau général des prix assurant l'équilibre sur le marché des biens et des services à chaque période.
4. À partir des résultats de la question précédente, montrez que la dynamique du PIB peut s'écrire :

$$\Delta y_{t+1} = y_{t+1} - y_t = \frac{3}{4}(\bar{m} + \Delta\theta_{t+1} - \Delta w_{t+1}) + \Delta e_{t+1} \quad (7)$$

avec $\Delta e_{t+1} = e_{t+1} - e_t$, $\Delta\theta_{t+1} = \theta_{t+1} - \theta_t$ et $\Delta w_{t+1} = w_{t+1} - w_t$. Puis, en utilisant les équations 1, 4 et 5, donnez l'expression de la dynamique du chômage ($\Delta u_{t+1} = u_{t+1} - u_t$) et de la dynamique de l'inflation ($\Delta p_{t+1} = p_{t+1} - p_t$), en fonction de $\bar{m}$, $\bar{u}$, u_t, $\Delta\theta_{t+1}$, Δe_{t+1} et Δp_t. Quelle est cette relation entre dynamique des prix et taux de chômage ?

L'état stationnaire

Supposons que les conditions assurant la convergence vers un état stationnaire stable soient respectées. Par ailleurs, à long terme, l'offre d'énergie est constante ($\Delta e_t = 0, \forall t$) et il n'y a plus de choc sur la demande ($\Delta\theta_t = 0, \forall t$).

5. En utilisant l'équation de la dynamique du chômage et l'équation de la dynamique de l'inflation, déterminez le taux du chômage et le taux d'inflation à l'équilibre stationnaire (respectivement $\tilde{u} = u_{t+1} = u_t$ et $\tilde{p} = \Delta p_{t+1} = \Delta p_t$). Expliquez soigneusement quels sont les déterminants de l'inflation et du chômage à long terme. Comment la règle de formation des salaires fixée par les syndicats et les employeurs affecte-t-elle l'équilibre de long terme ?

La dynamique de l'inflation

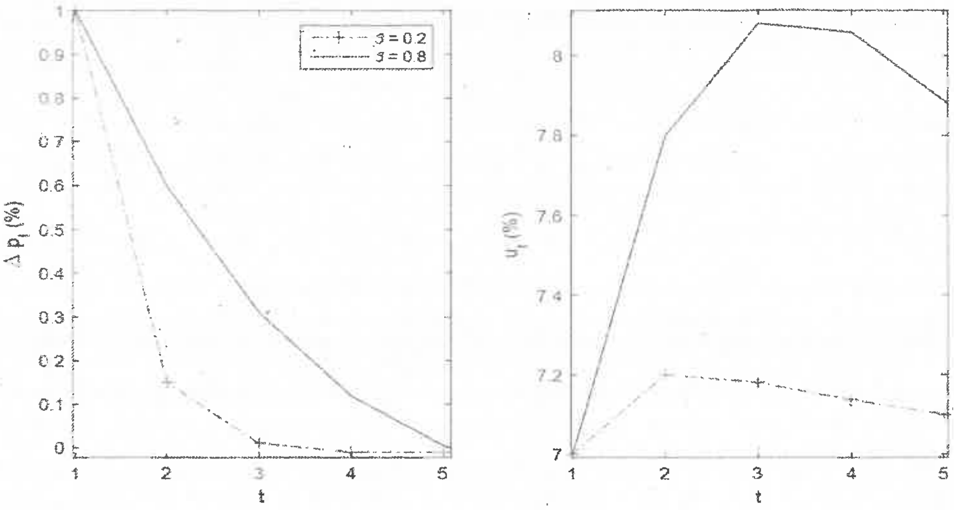
Le système décrivant la dynamique du chômage et de l'inflation de cette économie s'écrit à présent :

$$\begin{cases} \Delta u_{t+1} = \beta\Delta p_t - \alpha(u_t - \bar{u}) - \Delta\theta_{t+1} \\ \Delta p_{t+1} = \frac{1}{4}\Delta\theta_{t+1} + \frac{3}{4}(\beta\Delta p_t - \alpha(u_t - \bar{u})) - \Delta e_{t+1} \end{cases}$$

En $t = 0$, l'économie est à l'état stationnaire avec $\tilde{u} = 7\%$ et $\tilde{p} = 0\%$.

6. La Figure 1 illustre l'évolution de l'inflation et du chômage, pour $\beta = 0.2$ et $\beta = 0.8$ ($\alpha = 0.25$), suite à un choc négatif sur l'offre d'énergie en $t = 1$ tel que $\Delta e_1 = -1\%$ et $\Delta e_t = 0, \forall t > 1$. Quels mécanismes permettent d'expliquer les différentes trajectoires de l'inflation et du chômage en fonction du paramètre β ?

FIGURE 1 – Réponse de l'économie à $\Delta e_1 = -1\%$ pour $\beta = 0.2$ et $\beta = 0.8$



7. Soit un choc positif sur la demande tel que $\Delta\theta_1 > 0$ et $\Delta\theta_t = 0, \forall t > 1$. Expliquez soigneusement les mécanismes économiques permettant de décrire l'évolution de l'inflation et du chômage jusqu'au retour à l'état stationnaire. (Aucun calcul n'est demandé).
8. Pour chacun des deux chocs précédents, indiquez quelle mesure de lutte contre l'inflation vous semble la plus adaptée.