# CONCOURS ADMINISTRATEUR EXTERNE DE L'INSEE

Session 2022

# ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**DURÉE : 4 heures**

**L'énoncé comporte 8 pages, numérotées de 1 à 8**

***Tous documents et appareils électroniques interdits***

# Partie 1 : algèbre-analyse

**Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.**

## Exercice 1

**Définitions et notations :**

- **On note $\binom{n}{k}$ le coefficient du binôme défini, pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$, par $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.**
- **On note $E$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $C^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.**
- **À toute fonction $f$ appartenant à $E$, on associe la fonction $B_n(f)$ définie sur $[0,1]$ par :**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1], \quad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

***Remarque***
***On pourra, pour simplifier certains calculs, utiliser une variable aléatoire $Z$ qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$, où $x \in [0,1]$***

1. **On suppose dans cette question que $f$ est définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x^2$.**
   (a) **Calculer, pour tout entier naturel $n$, $B_n(f)$.**
   (b) **Montrer que $B_n(f)$ converge uniformément vers la fonction $f$ quand $n$ tend vers $+\infty$.**

   ***Dans la suite, on revient au cas général où $f$ est une fonction quelconque de classe $C^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.***
2. **Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k}$ en fonction de $x$ et de $n$.**
3. **Soit $x \in [0,1]$ et $a$ un réel strictement positif.**
   **On pose : $I = \{k \in [\![0,n]\!] \ ; \ |k-nx| \geqslant na\}$ et $J = \{k \in [\![0,n]\!] \ ; \ |k-nx| < na\}$.**
   (a) **Justifier l'existence d'un réel $K$ positif tel que :**
   $$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|.$$
   (b) **Établir, pour tout entier naturel $n$ non nul, l'inégalité suivante :**
   $$\sum_{k \in I} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{x(1-x)}{na^2}.$$
   (c) **En déduire le résultat suivant :**
   $$\forall x \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant K\left(a + \frac{1}{4a^2 n}\right).$$
   (d) **Montrer que $B_n(f)$ converge uniformément vers $f$ quand $n$ tend vers $+\infty$.**
4. **Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur $[0,1]$ telle que, pour tout entier naturel $n$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt = 0$.**
   **Montrer que $f = 0$.**
5. **Soit $g$ une fonction de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que :**
   - $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
   - **Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} e^t g'(t) = \ell$.**
   - **Pour tout réel $x$ strictement positif, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} g(t)dt = 0$.**

   **Montrer que $g = 0$.**

# Exercice 2

**Les trois premières parties sont indépendantes entre elles. La quatrième fait la synthèse de ces trois parties.**

L'espace de référence est $E = M_n(\mathbb{C})$. On rappelle que tout élément de $E$ est ***trigonalisable***, c'est-à-dire semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres.

### 1ère partie

Soit $f$ une ***forme linéaire*** définie sur $M_n(\mathbb{C})$. On considère les deux propriétés :

- $f$ est commutative vis-à-vis du produit matriciel, c'est-à-dire : $f(AB) = f(BA)$.
- $f$ est invariante par similitude, c'est-à dire que si P est semblable à Q : $f(P) = f(Q)$.

1. Montrer que : $\boxed{i \Rightarrow ii.}$

2. On veut montrer que : $\boxed{ii \Rightarrow i.}$

   a) Montrer que, si A ou B sont inversibles, AB est semblable à BA et conclure.
   b) Montrer que, dans le cas opposé, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A - \lambda I_n$ est inversible.
   c) Conclure.

3. On suppose maintenant que $f$ vérifie les propriétés $i$ et $ii$. On note $E_{i,j}$ les matrices élémentaires n'ayant qu'un seul 1 à la ligne *i* et la colonne *j* et 0 ailleurs.

   a) Calculer $E_{i,j}E_{j,i}$ et $E_{i,i}E_{i,j}$.
   b) En déduire les valeurs de $f(E_{i,i})$ et $f(E_{i,j})$ $pour\ i \neq j$.
   c) En déduire que : $\exists\, \alpha \in \mathbb{C},\ \forall\ A \in E : f(A) = \alpha\, Tr(A)$.
   d) Que peut-on dire de la réciproque du résultat ainsi démontré ?

### 2ème partie

**On suppose maintenant que $f$ est une forme linéaire non nulle mais ne vérifiant pas nécessairement les propriétés $i$ et $ii$ précédentes.**
**On pose $H = Ker f$. Soit $A_0 \in E$ telle que : $f(A_0) \neq 0$.**

4. Montrer que : $E = H \oplus Vect\{A_0\}$.

5. On considère une application $s$ de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall\ A, B \in E : s(A+B) \leq s(A) + s(B) \\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C} : s(\lambda A) = |\lambda| s(A) \end{cases}.$$

   $s$ s'appelle ***semi-norme*** sur E. On notera qu'**on n'a pas** l'implication :

$$\forall\ A \in E : s(A) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

   On suppose que : $\boxed{\forall\ Q \in H : s(Q) = 0.}$

   a) Montrer que : $\forall\ A \in E, \forall\ Q \in H : s(A+Q) = s(A)$.
   b) En déduire qu'il existe $\beta \geq 0$ **tel que :** $\forall\ A \in E : s(A) = \beta\,|f(A)|$.

**3$^{ème}$ partie**

Soit N une matrice ***nilpotente*** c'est-à-dire telle qu'il existe $p \in \mathbb{N},\ p \geq 2$ vérifiant $N^p = 0.$

6. Montrer que N est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est nulle.

7. Réciproquement, montrer que toute matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle est nilpotente.

8. Montrer que toute matrice de diagonale nulle ***non nécessairement triangulaire*** est la somme de deux matrices nilpotentes.

9. On admet que ***toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle***. Montrer que le sous-espace vectoriel de E engendré par les matrices nilpotentes est l'ensemble des matrices de trace nulle.

**4$^{ème}$ partie**

Soit $s$ une semi-norme définie sur E (cf. question 5) non identiquement nulle qu'on suppose ***invariante par similitude*** (définition analogue à celle de la première partie).

10.
   a) Soit N une matrice nilpotente de E, semblable d'après la question 6 à une matrice triangulaire supérieure T de diagonale nulle.

      En interprétant T comme la matrice représentative d'un endomorphisme $g$ de $\mathbb{C}^n$ relativement à une base $(e_1, \ldots, e_n)$ et en définissant une nouvelle base sous la forme : $e'_1 = e_1,\ e'_k = \mu_k e_k\ (k = 2, \ldots, n),$ montrer que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*,$ on peut trouver une matrice triangulaire supérieure $T_q$ semblable à T dont les éléments $t_{i,j}$ vérifient :
      $$|t_{i,j}| < \frac{1}{q}.$$
      *On cherchera les coefficients $\mu_k$ appropriés.*

   b) Montrer que : $s(T_q) \to 0$ quand $q \to +\infty.$
   c) En déduire que : $s(N) = 0.$

11.
   a) En déduire que $s$ s'annule sur l'ensemble des matrices de trace nulle.

   b) Conclure de ce problème que toute semi-norme $s$ invariante par similitude est de la forme :
   $$\forall\ A \in E : s(A) = \gamma |Tr(A)|,$$
   où $\gamma$ est un réel positif ou nul fixé.

# Partie 2 : probabilités-statistiques

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.

## Exercice 1

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont supposées être définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit $a$ et $b$ deux réels, $b > 2$ et $X$ une variable aléatoire de densité :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{b}{(x-a)^{b+1}} \text{ si } x \geqslant a+1 \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On dit que $X$ suit la loi de Pareto $\mathcal{P}(a, b)$.
On suppose que $a$ et $b$ sont deux paramètres inconnus que l'on désire estimer.
On considère donc un $n-$échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de $n$ variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que $X$.

### Préliminaire

1. Déterminer la fonction de répartition de $X$.
2. Étudier l'existence de l'espérance de $X$ et en cas d'existence, la calculer.

### Partie 1

On suppose dans cette partie que le paramètre $b$ est connu et on désire construire un estimateur de $a$.
On pose $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $A_n = M_n - 1$.

3. Montrer que $M_n$ suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.
4. Calculer $\mathbb{E}(|A_n - a|)$.
5. En déduire que $A_n$ est un estimateur convergent de $a$.
6. Soit $\alpha \in ]0, 1[$.
   Déterminer en fonction de $n$, de $b$ et de $A_n$ un intervalle de confiance pour $a$ au risque $\alpha$.

### Partie 2

On suppose dans cette partie que le paramètre $a$ est connu et on désire construire un estimateur de $b$.
On pose :

$$B_n = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln(X_i - a)}$$

7. Donner la loi de $\ln(X - a)$.
8. En déduire que $B_n$ converge en probabilité vers $b$.

### Partie 3

On suppose dans cette partie que $a$ et $b$ sont inconnus et on désire estimer $b$.

$$\hat{B}_n = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(X_i - A_n)} \text{ et } R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i - a) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i - A_n)$$

*On admettra le résultat suivant :*
*si $(Z_n)$ est une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers la loi de $Z$ et $(T_n)$ une suite de variable aléatoire qui converge en probabilité vers une variable certaine $T$, alors les suites de variables $(Z_nT_n)$ et $(Z_n+T_n)$ convergent en loi respectivement vers les lois des variables alétoires $ZT$ et $Z + T$.*

9. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$

   (b) En déduire l'inégalité suivante :

$$R_n \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{A_n - a}{X_i - A_n}$$

   (c) En déduire que $\sqrt{n} R_n$ converge en probabilité vers $0$.

10. (a) Montrer que $\sqrt{n}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i - a)\right)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \frac{1}{b^2})$.

   (b) En déduire que $\sqrt{n}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i - a)\right) + \sqrt{n}R_n$ converge en loi et donner la loi limite.

   (c) Simplifier $b\hat{B}_n\left(\sqrt{n}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i - a)\right) + \sqrt{n}R_n\right)$.

   (d) Montrer que $\hat{B}_n$ converge en probabilité vers $b$.

   (e) En déduire que $\sqrt{n}(\hat{B}_n - b)$ converge en loi et donner la loi limite.
   Donner un intervalle de confiance pour $b$ au risque $0,05$.

# Exercice 2

**Chacune des parties de ce problème utilise les résultats du prologue et des parties précédentes.**

**Prologue**

Soit $Z \sim> N(0,\, 1)$. Calculer $E(e^{s\,Z})$ pour $s \in \mathbb{R}$.

■ ■ ■

On considère le modèle linéaire $Y_i = bx_i + U_i$, pour $i \in \mathbb{N}$, où les $x_i$ sont des observations ***non aléatoires***, les $U_i$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi $N(0,\, \sigma^2)$ $(\sigma \neq 0)$ et $b$ un paramètre inconnu.

On estime ce modèle sur les données relatives à la période $i = 1,\, \dots,\, n$.

**1ère partie**

1. Calculer l'estimateur des moindres carrés ordinaires de $b$, soit $\hat{b}_n$, et donner sa loi.
2. On suppose **dans cette question seulement** que : $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_i^2 \to \mu_{2,x}$ quand $n \to +\infty$.
   Étudier la convergence en loi de $\sqrt{n}(\hat{b}_n - b)$ quand $n \to +\infty$.
3. **Pour cette question seulement**, étude du cas particulier $x_i = i$. Déterminer $\alpha$ pour que $n^{\alpha}(\hat{b}_n - b)$ converge en loi vers une loi non dégénérée (différente d'une constante) quand $n \to +\infty$.

On revient au cas général.

4. Pour $i \in \{1,\, 2,\, \dots,\, n\}$, on pose : $\hat{U}_i = Y_i - \hat{b}_n x_i$.
   a) Expliciter la loi de $\hat{U}_i$.
   b) Calculer $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2\right)$.
   c) En déduire un estimateur sans biais de $\sigma^2$, noté $\hat{\sigma}_n^2$.
5. 
   a) Calculer $Cov(\hat{b}_n,\, \hat{U}_k)$ pour $k \in \{1,\, \dots,\, n\}$.
   b) Montrer que $\hat{b}_n$ et $\hat{U}_k$ sont indépendants.

**2ème partie**

6. On considère un instant $\boxed{j > n.}$
   a) Quel est le prédicteur naturel de $Y_j$ fondé sur ce modèle ? On le notera $\hat{Y}_j$.
   b) Calculer $E(\hat{Y}_j - Y_j)$ et $E(\hat{Y}_j - Y_j)^2$.

En réalité, la variable d'intérêt (expliquée par le modèle) est une variable $R_i > 0$ (par exemple le revenu du ménage *i)*, définie par : $Y_i = \mathrm{Ln}\, R_i$. Le prédicteur intuitif de $R_j$ (pour $j > n$) est alors :

$$\hat{R}_j = e^{\hat{Y}_j}.$$

7. Calculer $E(\hat{R}_j - R_j)$. Qu'en conclut-on ?

8. On pose : $\hat{\hat{R}}_j = e^{\lambda_j}\, \hat{R}_j$.
   Déterminer, en fonction de $\sigma^2,\ x_i\ (i = 1, \ldots, N)$ et $x_j$, la valeur de $\lambda_j$ qui assure que $E(\hat{\hat{R}}_j - R_j) = 0.$

**3ème partie**

9. On réalise un tirage à probabilités égales d'un indice parmi $\{1, 2, \ldots, n\}$. On appelle $I$ la variable aléatoire représentant l'indice tiré. On suppose que $I$ est **indépendant** des $U_i$. On admet que $\hat{U}_I$ (avec l'indice aléatoire $I$) est une variable aléatoire.
   a) Exprimer sous forme sommatoire la densité $g$ de la loi de $\hat{U}_I$.
   b) En déduire la valeur de $E\,\hat{U}_I$.
   c) En déduire la valeur de $V\,\hat{U}_I$.

10. Montrer que $\hat{b}_n$ et $\hat{U}_I$ sont indépendants.
    *On pourra utiliser les fonctions de répartition.*

11. On revient au cadre de la 2ème partie. On pose : $Y_j^* = \hat{b}_n\, x_j + \hat{U}_I$ et : $R_j^* = e^{Y_j^*}$.
    a) Calculer $E\, e^{\hat{U}_I}$.
    b) En déduire $E\, R_j^*$.
    c) Donner une expression approchée de $E\, R_j^*$ quand les $x_i^2$ et $x_j^2$ sont petits par rapport à $\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ et conclure.

■ ■ ■ ■ ■ ■

CONCOURS ADMINISTRATEUR EXTERNE DE L'INSEE

———

**SESSION 2022**

——

# COMPOSITION D'ÉCONOMIE

———

DURÉE : 4 heures

———

L'énoncé comporte une page.

*Tous documents et appareils électroniques interdits.*

**Tournez la page S.V.P.**

# Dissertation (13 points)

**Le regain actuel d'inflation en Europe et aux Etats-Unis est-il conjoncturel ?**

*La dissertation a pour objet de vérifier la capacité des candidats à mobiliser la théorie et les concepts micro- et macroéconomiques afin d'analyser des situations concrètes. Les candidats veilleront ainsi à montrer dans quelle mesure les outils de l'économiste permettent de penser les problèmes économiques actuels, et de leur apporter des solutions.*

# Exercice (7 points)

L'objet de cet exercice est d'analyser la substitution intertemporelle de l'offre de travail. Considérons un individu qui doit déterminer son offre de travail sur deux périodes. On note $w_1$ le salaire nominal en $t = 1$ et $w_2$ le salaire nominal anticipé pour $t = 2$. A chaque période $t$, l'agent consomme un bien $x_t$. Le prix de ce bien en $t = 1$ est $p_1$ et $p_2$ est le prix anticipé pour $t = 2$. En $t = 1$, le salaire nominal et le niveau des prix sont normalisés à 1 ($w_1 = 1$ et $p_1 = 1$).
On note $l_t$ le temps de travail en $t$. L'agent a la possibilité d'épargner au taux d'intérêt $r$ et son taux de préférence pour le présent est $\beta \leq 1$. Ainsi, les contraintes de l'agent sont :

$$p_1 x_1 = w_1 l_1 - E \qquad (1)$$

$$p_2 x_2 = w_2 l_2 + E(1+r) \qquad (2)$$

où $E$ représente l'épargne. Enfin, la désutilité du travail est une fonction décroissante du capital santé $k_t$ de l'agent. En normalisant à 1 le stock de capital santé en $t = 1$, nous pouvons écrire l'utilité intertemporelle de l'agent de la manière suivante :

$$U(x_1, x_2, l_1, l_2) = \ln(x_1) - \frac{l_1^2}{2} + \beta[\ln(x_2) - \frac{l_2^2}{2k_2}] \qquad (3)$$

1. Déterminez l'expression de la consommation optimale du bien $x$ en $t = 1$ et $t = 2$ lorsque $l_1$ et $l_2$ sont données.
2. Déduisez en la nouvelle expression de l'utilité intertemporelle que vous noterez $\Omega(l_1, l_2)$. Puis, calculez l'offre de travail optimale $l_t$ pour chaque période $t$.
3. Considérons que $\beta = 1$ et $k_2 = 1$. Quels sont les effets d'une hausse du salaire anticipé $w_2$ ? Expliquez soigneusement votre résultat.
4. De même, comment évolue l'offre de travail lorsque le prix anticipé pour $t = 2$ augmente ? Expliquez.
5. Considérons à présent le cas où $w_2 = 1$ et $k_2 = 1$. Comment le taux d'intérêt affecte-t-il l'offre de travail ? Commentez. Que pouvez-vous dire du cas particulier $\beta(1 + r) = 1$ ?
6. Supposons que $\beta = 1$ et $w_2 = 1$, comment l'état de santé anticipé pour $t = 2$ modifie-t-il l'offre de travail ? Expliquez soigneusement. Dans quelle mesure ce résultat peut-il contribuer au débat sur le système de retraite ?