CONCOURS ADMINISTRATEUR EXTERNE DE L'INSEE

SESSION 2021

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 8 pages, numérotées de 1 à 8.

Tous documents et appareils électroniques interdits.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE 1 : algèbre-analyse

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.

Exercice 1

La 2ème partie de ce problème (questions 6.b et au-delà) s'appuie sur des résultats de la 1ère partie. La 3ème partie peut être traitée indépendamment des deux autres mais implique une mise en relation avec les résultats de la 2ème .

Dans tout le problème, on considère un espace euclidien E de dimension $n \geq 2.$

1ère partie

Soient quatre vecteurs de E : $a_1, a_2, b_1, b_2,$ tels que chacune des familles $\{a_1, a_2\}$ et $\{b_1, b_2\}$ est *libre*. On considère l'endomorphisme $f : x \in E \to f(x) = <x, a_1> b_1 + <x, a_2> b_2.$

1. Cet endomorphisme est-il injectif ?

2. On s'intéresse aux valeurs propres ***non nulles (réelles)*** de f.

   a) Montrer que le sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle est inclus dans $\operatorname{Im} f$.

   b) Déterminer une équation du second degré que doivent vérifier les valeurs propres non nulles de f.
   On pourra raisonner en introduisant la matrice de la restriction de f *à* $\operatorname{Im} f$.

   c) Discuter du nombre de valeurs propres non nulles (réelles) et les déterminer.

   d) Déterminer, pour chacune des valeurs propres obtenues, le sous-espace propre correspondant.

3. En déduire une condition nécessaire et suffisante de diagonalisation de f.

   On dressera un tableau récapitulatif des différents cas de figure possibles portant sur les paramètres a_i, b_i *et* $n,$ *en indiquant, pour chacun d'entre eux, si f est diagonalisable ou non.*

4. Appliquer aux cas particuliers suivants :

   a) $a_2 = b_1, b_2 = a_1$
   b) $a_2 = b_1, b_2 = -a_1.$

2ème partie

On rappelle qu'un endomorphisme u **de E est dit :**

- ***symétrique*** **(ou *auto-adjoint*) si et seulement si :** $\forall x, y \in E : <u(x), y> = <x, u(y)>$
- ***antisymétrique*** **si et seulement si :** $\forall x, y \in E : <u(x), y> = -<x, u(y)>.$

5.
   a) Déterminer le seul endomorphisme de E à la fois symétrique et antisymétrique.

   b) Montrer que u est antisymétrique si et seulement si :

$$\forall\, x \in E : <u(x),\, x> = 0.$$

6. Soient a et b deux vecteurs de E *formant une famille libre*. On pose :

$$\forall\, x \in E : q(x) = <x\,,\, a> <x\,,\, b>.$$

   a) Montrer que, s'il existe un endomorphisme *symétrique* u de E tel que :

$$\forall\, x \in E : q(x) = <x\,,\, u(x)>, \quad \text{alors } u \text{ est unique.}$$

   b) Déterminer explicitement cet endomorphisme symétrique en fonction de a et b (*on montrera qu'il est de la forme des endomorphismes étudiés dans la 1ère partie*).

   c) En utilisant les résultats de la 1ère partie (ou en refaisant une étude directe), déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

   d) Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

3ème partie

Dans cette partie, a et b sont deux vecteurs quelconques de E, seulement supposés <u>non nuls</u>.

On s'intéresse à la fonction définie par : $\forall\, x \in E - \{0\} : r(x) = \dfrac{<x,\, a> <x,\, b>}{\|x\|^2}$.

7.
   a) Montrer que : $\forall\, x \in E - \{0\} : |r(x)| \leq \|a\|\ \|b\|$.

   b) Sous quelle condition sur a et b peut-il y avoir égalité dans l'inégalité précédente ?

Dans la suite, on suppose que la condition du 7.b n'est pas satisfaite et on s'intéresse aux extrema de la fonction r.

8. On suppose tout d'abord que a et b sont ***orthogonaux***. On pose : $P = Vect\{a\,,\, b\}$.

   a) Déterminer les extrema de r sur P.

   On pourra montrer que cette étude se ramène à celle des extrema d'une fonction d'une seule variable réelle.

   b) En déduire les extrema de r sur $E - \{0\}$. Montrer que ces résultats sont cohérents avec ceux de la 2ème partie et qu'ils auraient pu être obtenus à partir de ces derniers.

9. Refaire la même étude qu'à la question 8 dans le cas général.

Exercice 2

Pour toute fonction f et tout entier naturel n, f^n désigne la fonction qui à x associe $(f(x))^n$.
On note E_0 l'ensemble des applications continues de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$.
On définit l'ensemble :

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ f \in E_0 \ ; \ \int_0^1 |f(x)|dx \text{ existe} \right\}.$$

Si une fonction f est dans $\mathcal{L}_1$, son intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ sera notée $I(f)$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier n et tout élément f de $\mathcal{L}_1$, l'intégrale $a_n(f) = \int_0^1 x^n f(x)dx$ est convergente.

   (b) En déduire que, pour tout polynôme P, l'intégrale $\int_0^1 P(x)f(x)dx$ est convergente.

2. Soit $f \in \mathcal{L}_1$.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que : $\exists \eta \in]0,1[, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \left| \int_\eta^1 x^n f(x)dx \right| \leqslant \varepsilon$.

   (b) Ce réel η étant ainsi choisi, montrer que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \left| \int_0^\eta x^n f(x)dx \right| \leqslant \varepsilon$.

   (c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n(f) = 0$.

3. (a) On considère α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$.
   Trouver un polynôme du second degré, P, satisfaisant aux conditions suivantes :

   i. $\forall x \in]\alpha, \beta[, \ P(x) > 1$
   ii. $\forall x \in [0,\alpha] \cup [\beta, 1], \ 0 \leqslant P(x) \leqslant 1$.

   (b) Un tel polynôme P étant choisi, que dire de $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_\alpha^\beta P^n(x)dx$ et de $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 P^n(x)dx$?

4. (a) Soit f un élément de $\mathcal{L}_1$. On suppose qu'il existe trois réels $\varepsilon, \alpha, \beta$, avec $\varepsilon > 0$ et $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, tels que $\forall x \in [\alpha, \beta], \ f(x) \geqslant \varepsilon$.
   On considère un polynôme P vérifiant les conditions de la question précédente.
   Que dire de $\lim\limits_{n \to +\infty} I(fP^n)$?

   (b) Soit $f \in \mathcal{L}_1$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n(f) = 0$. Montrer que $f = 0$.

5. On considère dans cette question la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = e^{-(x^{1/4})} \sin(x^{1/4}).$$

   Si h est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$, on rappelle les deux résultats suivants :

   — On définit, pour tout couple réel (a,b), l'intégrale $\int_a^b h(t)\mathrm{d}t$ par :

$$\int_a^b h(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}\big(h(t)\big)\mathrm{d}t + i \int_a^b \mathrm{Im}\big(h(t)\big)\mathrm{d}t.$$

   — Si $\int_0^{+\infty} |h(t)|\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_0^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$ existe.

   On pose $\omega = e^{\frac{i\pi}{4}}$ et, pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\omega t}\mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que l'intégrale définissant I_n est convergente.

   (b) Établir, pour tout entier naturel n, la relation suivante : $I_n = \dfrac{n!}{\omega^{n+1}}$.

   (c) Justifier que $\mathrm{Im}(I_{4n+3}) = 0$.

   (d) En déduire, à l'aide d'un changement de variable que, pour tout entier naturel n, $\int_0^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$.

   (e) Conclusion ?

Partie 2 : probabilités-statistiques

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants

Exercice 1

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur cet espace.

On rappelle que $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des événements aléatoires, que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable ainsi que par passage au complémentaire ; de plus, pour toute variable aléatoire X et tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(I)$ appartient à $\mathcal{A}$.

On note C l'ensemble des éléments ω de Ω pour lesquels $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0$.

On pose, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$B(\varepsilon) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} [|X_n| < \varepsilon].$$

1. **Montrer que $B(\varepsilon)$ est un élément de $\mathcal{A}$.**
2. **Justifier que $\mathcal{C} = \bigcap\limits_{\epsilon\in\mathbb{R}_+^*} B(\varepsilon)$.**
3. **(a) Soit ε et ε' deux réels strictement positifs tels que $\varepsilon < \varepsilon'$.**
   Établir l'inclusion suivante :
   $$B(\varepsilon) \subset B(\varepsilon').$$
   (b) Montrer que
   $$C = \bigcap_{p=1}^{+\infty} B\left(\frac{1}{p}\right).$$
   (c) En déduire que C est un élément de $\mathcal{A}$.
   On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0 si $\mathbb{P}(C) = 1$.

4. **On se propose dans cette question de montrer que, si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0, alors elle converge en probabilité vers 0.**
   On suppose donc que $\mathbb{P}(C) = 1$.
   On pose, pour tout entier naturel k non nul et tout $\varepsilon > 0$, $E_k(\varepsilon) = \bigcup\limits_{n=k}^{+\infty} [|X_n| \geqslant \varepsilon]$.
   (a) Montrer que :
   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} [|X_n| \geqslant \varepsilon]\right) = 0.$$
   (b) Justifier que :
   $$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(E_k(\varepsilon)) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k(\varepsilon)\right).$$
   (c) En déduire le résultat suivant :
   $$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} [|X_n| \geqslant \varepsilon]\right) = 0.$$
   (d) Conclure.
5. **Dans cette question, on considère un réel $\alpha > 0$ et on suppose que les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et que, pour tout entier naturel n non nul, X_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.**
   (a) Justifier que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

(b) Soient $p \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$ deux entiers naturels.
Pour tout entier naturel N supérieur à k, on pose :

$$p_N = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{N} \left[|X_n < \frac{1}{p}\right]\right).$$

Étudier, en distinguant les cas suivants, la convergence de la suite $(p_N)_{N\in\mathbb{N}}$.

i. $\alpha = 1$.

ii. $\alpha < 1$.

iii. $\alpha > 1$.

(c) Pour quelles valeurs de α la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle presque sûrement vers 0 ?

Exercice 2

Chaque partie de ce problème dépend des précédentes.

Soit N **un entier naturel non nul. On note :** $E_N = \{1, ..., N\}$.

1ère partie

On réalise une succession de tirages ***indépendants*** d'un entier naturel dans E_N. La probabilité de tirer l'entier $j \in E_N$ à chaque tirage est notée $p(j)$, appartenant à $]0, 1[$ et ***ne dépendant pas du tirage considéré***. On note $T(i)$ l'élément de E_N obtenu au *i-ième* tirage.
Ainsi : $\forall\ j \in E_N : P\{T(i) = j\} = p(j)$.

Le tirage sera dit **uniforme** dans le cas particulier où les $p(j)$ sont identiques pour tout $j \in E_N$.

On prendra garde à la désignation des entiers naturels considérés et aux conventions prises pour les indices : l'indice i sera relatif au rang du tirage ; les autres lettres $j, k, ...$ seront relatives aux éléments de E_N.

On suppose qu'on réalise $\boxed{n\ (n \geq 1)}$ **tirages successifs** du type ci-dessus. On notera :

- S_n l'*ensemble* des entiers de E_N tirés au cours de ces n tirages (***attention*** : il s'agit d'un ensemble, les éléments qu'il contient ne sont comptés qu'une seule fois même si un même élément de E_N a été tiré plusieurs fois)

- $\pi_{j,n} = P\{j \in S_n\}$ pour $j \in E_N$.
- $\pi_{j,k,n} = P\{j \in S_n\ et\ k \in S_n\}$ pour $j \in E_N, k \in E_N, j \neq k$.

1. Pour $j \in E_N$, on note : $D_{j,n}$ la variable aléatoire représentant le nombre de fois où j a été tiré au cours des n tirages.

   a) Déterminer la loi de $D_{j,n}$.
   b) Exprimer $\pi_{j,n}$ en fonction de $p(j)$ et de n.
   c) Si l'on fixe les $\pi_{j,n}$ à des valeurs données *ex-ante*, quelles valeurs doivent prendre les $p(j)$? Compte tenu des contraintes portant sur les $p(j)$, quelles conditions doivent alors satisfaire les $\pi_{j,n}$?

   d) ***Dans cette question seulement***, on se place dans le cas *uniforme* (défini plus haut) et où :
   $$N \to +\infty\ et\ \frac{n}{N} \to \alpha > 0.$$
   Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \pi_{j,n}\ pour\ tout\ j \in E_N$.

2. Exprimer $E(Card\, S_n)$ en fonction des $p(k)$, $n\ et\ N$.

3. Calculer $\pi_{j,k,n}\ (j \neq k)$.

4. Pour $i_1\ et\ i_2 \in \{1, ..., n\}, i_1 \neq i_2$, calculer la probabilité $P\{T(i_1) \neq T(i_2)\}$.

2ème partie

On considère N réels $x_1, \ldots, x_N$. On note : $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$ et $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})^2$.

On considère les éléments $x_{T(i)}\ pour\ i = 1, \ldots, n$. On pose : $Y_i = \frac{1}{N}\frac{x_{T(i)}}{p\,[T(i)]}$. On admettra que les $x_{T(i)}$ et les Y_i sont des variables aléatoires, d'espérance $E\ Y_i$ et de variance $V\ Y_i$.

5.
   a) Expliquer pourquoi les variables Y_i sont mutuellement indépendantes.
   b) Calculer $E\ Y_1$ et $V\ Y_1$, que l'on exprimera en fonction des x_k.
      On vérifiera que, dans le cas uniforme : $V\ Y_1 = s^2$.
   c) En déduire un estimateur sans biais de $\bar{x}$ utilisant les n variables $Y_1, \ldots, Y_n$.
   d) Calculer la variance de cet estimateur.
   e) Étudier son comportement asymptotique (convergence en probabilité et normalité asymptotique) quand $n \rightarrow +\infty$.

6.
   a) Construire un estimateur sans biais de s^2 utilisant les n variables $Y_1, \ldots, Y_n$.
      On l'exprimera sous forme sommatoire en fonction des Y_i.
   b) Donner une expression simple de cet estimateur dans le cas uniforme, en fonction de la variance empirique des Y_i.

3ème partie

On suppose dans cette partie que les x_k sont les réalisations de variables aléatoires réelles $X_1, \ldots, X_N$ indépendantes et de même loi L, d'espérance m et de variance $\sigma^2 > 0$.
On suppose que les familles de variables aléatoires $\{T(i)\}$ et $\{X_k\}$ sont mutuellement indépendantes. On admet enfin que les entités $X_{T(i)}$ sont des variables aléatoires.

7.
   a) Montrer que les variables aléatoires $X_{T(i)}$ sont de même loi mais *non indépendantes.*
      On pourra utiliser les fonctions de répartition.
   b) En déduire un estimateur sans biais de m, noté $\hat{m}_1$, utilisant les *n* variables $X_{T(i)}$.

8.
   a) Pour $i_1 \neq i_2 \in \{1, \ldots, n\}\ et\ k_1\ et\ k_2 \in E_N$, calculer
      $$E\,[X_{T(i_1)}X_{T(i_2)} \,/\, T(i_1) = k_1,\ T(i_2) = k_2].$$
   b) En déduire la valeur de $Cov\,[X_{T(i_1)}, X_{T(i_2)}]$.
   c) En déduire $V\ \hat{m}_1$. Que devient cette variance dans le cas uniforme ?

9. Pour $i = 1, \ldots, n$, on pose : $Z_i = \dfrac{1}{N} \dfrac{X_{T(i)}}{p\,[T(i)]}$ et : $\bar{Z}_n = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i$.

   a) Montrer que $\bar{Z}_n$ est aussi un estimateur sans biais de m.

   b) Dans quel cas s'identifie-t-il à l'estimateur obtenu en 7.b ?

10. On considère enfin une succession de *B* tirages de *n* éléments de E_N selon le processus uniforme défini ci-dessus, ces tirages étant indépendants. Pour chacun de ces tirages, on construit l'estimateur $\hat{m}_1$ de m défini en 7.b. Cet estimateur sera renoté $\hat{m}_{1,b}$ où $b \in \{1, \ldots, B\}$ désigne le $b-ième$ « lot » de tirages indépendants de *n* éléments de E_N.

    On note enfin : $\hat{\hat{m}}_B = \dfrac{1}{B} \sum_{b=1}^{B} \hat{m}_{1,b}$.

    a) Calculer $Cov\left(\hat{m}_{1,1}, \hat{m}_{1,2}\right)$.

    b) Comparer l'estimateur $\hat{\hat{m}}_B$ à l'estimateur naturel de m n'utilisant que les observations des variables $X_1, \ldots, X_N$.

CONCOURS ADMINISTRATEUR EXTERNE DE L'INSEE

SESSION 2021

COMPOSITION D'ÉCONOMIE

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 2 pages, numérotées de 1 à 2.

Tous documents et appareils électroniques interdits.

Tournez la page S.V.P.

Concours d'administrateur externe de l'INSEE
Epreuves écrites d'admissibilité
Avril 2021

Epreuve écrite d'économie
Durée de l'épreuve : 4h
Tous documents et appareils électroniques interdits

Dissertation (13 points)

Comment expliquer les écarts persistants de taux de chômage entre pays développés ?

La dissertation a pour objet de vérifier la capacité des candidats à mobiliser la théorie et les concepts micro- et macroéconomiques afin d'analyser des situations concrètes. Les candidats veilleront ainsi à montrer dans quelle mesure les outils de l'économiste permettent de penser les problèmes économiques actuels, et de leur apporter des solutions.

Exercice (7 points)

L'objet de cet exercice est d'analyser les effets d'un choc de demande dans une économie fermée, caractérisée par des rigidités réelles, où les agents forment des anticipations rationnelles. Le salaire nominal est fixé à l'avance lors de négociations entre syndicats et patronat, avec une cible en termes de salaire réel, indépendante des conditions macroéconomiques, et fonction uniquement du rapport de forces durant les négociations. Les firmes opèrent sur un marché des biens en concurrence pure et parfaite. L'offre de travail des ménages est supposée inélastique.
Pour simplifier l'analyse, on partira directement d'une forme dite log-linéarisée. Ainsi, on notera avec une minuscule le logarithme d'une grandeur écrite en majuscule. Par exemple, $m - p$ est le logarithme de $\frac{M}{P}$ où $m = ln(M)$ et $p = ln(P)$ avec M l'offre de monnaie en niveau et P le niveau moyen des prix. Par abus de langage, on appellera m offre de monnaie.
Le modèle est statique : on décrit son équilibre à la date t. Un choc de demande ε_t affecte l'économie au début de la période. Une unique grandeur est déterminée avant la réalisation du choc : le salaire nominal w_t. Toutes les autres dépendront du choc de demande ε_t. Elles donnent lieu à des anticipations rationnelles au début de la période. Par exemple, Ep_t, noté p_t^e, est l'espérance de prix en t, soit le prix anticipé. Le choc est nul en espérance : $E\varepsilon_t = 0$.
L'économie est caractérisée par les relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
w_t - p_t^e &= \omega & (1)\\
w_t - p_t &= \kappa + \beta u_t & (2)\\
y_t &= \mu - \nu u_t & (3)\\
y_t &= \gamma g + \delta(m - p_t) + \varepsilon_t & (4)
\end{aligned}
$$

où w_t, p_t, u_t, y_t sont respectivement le salaire nominal, le niveau moyen des prix, le taux de chômage (unique variable qui n'est pas un logarithme, mais un taux), et le PIB, à la date t. $\omega, \kappa, \beta, \mu, \nu, \gamma, \delta$ sont des paramètres exogènes, tous strictement positifs, connus des agents. Les dépenses publiques g et l'offre de monnaie m sont des paramètres de politique économique exogènes et correctement anticipés.

1. On rappelle que le salaire nominal w_t est l'unique grandeur déterminée avant la réalisation de ε_t, en sorte qu'elle est trivialement égale à son niveau anticipé : $w_t^e = w_t$. Pouvez-vous interpréter la première équation ? Que représente-t-elle ?

2. A quoi correspond chacune des trois autres relations ? Interprétez les coefficients γ et δ. On précise que l'offre de travail N^s étant inélastique, l'emploi $N_t = N^s(1-u_t) \Rightarrow n_t \simeq n^s - u_t$ et on considérera que $n^s = 0$ pour simplifier.
3. Ecrivez l'intégralité du modèle en espérance, et montrez que les niveaux anticipés du taux de chômage, de la production et du prix s'écrivent :

$$u_t^e = \frac{\omega - \kappa}{\beta} \qquad y_t^e = \mu - \nu\frac{\omega-\kappa}{\beta} \qquad p_t^e = m + \frac{\gamma}{\delta}g + \frac{1}{\delta}\left(-\mu + \nu\frac{\omega-\kappa}{\beta}\right)$$

   Quel est l'effet du niveau des dépenses publiques g et de l'offre nominale de monnaie m, toutes deux correctement anticipées, sur le PIB espéré y_t^e ? Sur le niveau moyen espéré des prix p_t^e ? Expliquez.
4. **Résolution de l'équilibre en anticipations rationnelles, pour un niveau quelconque du choc ε_t.** On rappelle que les agents connaissent les valeurs de tous les paramètres, à l'exception de la réalisation de ε_t. La résolution de l'équilibre en anticipations rationnelles doit aboutir à l'expression de la production d'équilibre y_t (entre autres), en fonction de paramètres exogènes et du niveau de ε_t. A cette fin, on passera les relations $(2), (3)$ et (4) en erreur d'anticipation, i.e. on posera la différence entre l'équation et sa version anticipée. On s'efforcera de se ramener à un système liant les erreurs d'anticipation $p_t - p_t^e$, $u_t - u_t^e$ et $y_t - y_t^e$ entre elles. Fournissez alors les expressions de $y_t - y_t^e$ et $p_t - p_t^e$ en fonction des différents paramètres, et de ε_t.
5. Quel est l'effet d'un choc positif de demande $\varepsilon_t > 0$ sur la production y_t ? Sur le niveau général des prix p_t ? Expliquez.
6. En comparant vos réponses aux questions 3 et 5, vous expliquerez soigneusement l'effet d'une politique macroéconomique de demande (budgétaire, monétaire) sur le PIB et les prix, suivant qu'elle est anticipée, ou non.
7. **Effet d'un choc de demande persistant en cas d'ajustement progressif des salaires.** On considère ici que le salaire nominal est déterminé à l'avance pour deux périodes, et que la moitié des salaires sont renégociés au début de chaque période. Le modèle demeure statique, mais on introduit la période antérieure (indicée par 0) à la période courante (indicée par t). Enfin, on s'intéresse à l'effet d'un choc persistant : le choc ε_0 est permanent et s'ajoute au choc ε_t à la date t. En t, les agents connaissent la valeur de ε_0 observée à la date précédente. Pour simplifier, l'équilibre de la période 0 est identique à celui des questions précédentes (intégralité des salaires renégociés à la date 0). Le salaire en vigueur en t est une moyenne des salaires fixés aux deux périodes, et a pour expression :

$$w_t = \frac{1}{2}(\omega + p_t^e) + \frac{1}{2}(\omega + p_0^e) = \omega + \frac{1}{2}(p_t^e + p_0^e)$$

   Le système décrivant l'équilibre à la date 0 est le suivant :

$$\begin{aligned} w_0 - p_0^e &= \omega & (1') \\ w_0 - p_0 &= \kappa + \beta u_0 & (2') \\ y_0 &= \mu - \nu u_0 & (3') \\ y_0 &= \gamma g + \delta(m - p_0) + \varepsilon_0 & (4') \end{aligned}$$

   et celui décrivant l'équilibre à la date t (date suivante) est :

$$\begin{aligned} w_t - p_t^e &= \omega + \tfrac{1}{2}(p_0^e - p_t^e) & (1") \\ w_t - p_t &= \kappa + \beta u_t & (2") \\ y_t &= \mu - \nu u_t & (3") \\ y_t &= \gamma g + \delta(m - p_t) + \varepsilon_0 + \varepsilon_t & (4") \end{aligned}$$

   Montrez que le PIB d'équilibre anticipé en t a pour expression :

$$y_t^e = \mu - \nu\frac{\omega-\kappa}{\beta} + \frac{\nu}{\nu + 2\delta\beta}\varepsilon_0$$

8. Pourquoi le choc persistant de demande ε_0 a-t-il un effet sur le PIB à la date t ? Etait-ce déjà le cas lorsque les salaires sont tous renégociés à chaque date (modèle précédent) ? Expliquez.