

CONCOURS ADMINISTRATEUR EXTERNE DE L'INSEE

SESSION 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6.

Tous documents et appareils électroniques interdits.

Tournez la page S.V.P.

Partie 1 : Algèbre-Analyse

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants

Exercice 1

On considère \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa base canonique, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

On note $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Si x est un vecteur de \mathbb{R}^n , on note X la matrice colonne de ses coordonnées dans \mathcal{B} .

On note $\text{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^t A$ sa transposée.

On dit qu'une matrice symétrique A est définie positive si, pour tout vecteur X non nul de \mathbb{R}^n , ${}^t X A X > 0$. Dans tout le problème A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

1. (a) Justifier qu'il existe une base orthonormale de \mathbb{R}^n , notée $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, constituée de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
(b) Montrer l'équivalence suivante : A est définie positive $\iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$
2. On note $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A ; pour tout x non nul de \mathbb{R}^n , on définit la fonction r_A , appelée quotient de Rayleigh, par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}, \quad r_A(x) = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}$$

Établir, pour tout vecteur x non nul, l'encadrement suivant :

$$\lambda_1 \leq r_A(x) \leq \lambda_n$$

3. On conserve les notations des questions précédentes et on appelle conditionnement de A le réel noté C_A défini par : $C_A = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$.

On se propose dans cette question de démontrer la formule suivante, appelée inégalité de Kantorovitch :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|^4 \leq \langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{C_A}} + \sqrt{C_A} \right)^2 \|x\|^4 \quad (1)$$

- (a) i. Montrer que l'application suivante définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^n :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad (x|y) = \langle Ax, y \rangle$$

On note $\| \cdot \|_A$ la norme associée.

ii. Exprimer $\langle A^{-1}x, x \rangle$ et $\langle Ax, x \rangle$ à l'aide de $\| \cdot \|_A$.

iii. En déduire l'inégalité suivante : $\|x\|^4 \leq \langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle$

- (b) Montrer que, pour établir la relation (1), il suffit de la vérifier pour un vecteur x vérifiant $\|x\|^2 = 1$.

- (c) On note donc un vecteur x de \mathbb{R}^n de norme 1 et qui s'écrit $x = \sum_{k=1}^n x_k \varepsilon_k$.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on définit la variable aléatoire Z par : $Z(\Omega) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et, pour tout i de $[[1, n]]$, $\mathbb{P}([Z = \lambda_i]) = x_i^2$.

i. Justifier que la relation précédente définit bien une loi de probabilité.

ii. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{E}\left(\frac{1}{Z}\right)$ en fonction de $\langle Ax, x \rangle$ et de $\langle A^{-1}x, x \rangle$.

iii. Établir l'inégalité suivante : $\frac{1}{Z} \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_n - Z}{\lambda_1 \lambda_n}$.

iv. En déduire que :

$$\mathbb{E}(Z)\mathbb{E}\left(\frac{1}{Z}\right) \leq -\frac{1}{\lambda_1 \lambda_n} \left(\mathbb{E}(Z) - \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2} \right)^2 + \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n}$$

v. Déduire de ce qui précède l'inégalité de Kantorovitch.

Exercice 2:

Le préambule et la première partie de ce problème sont indépendantes. La deuxième partie combine des résultats des parties précédentes.

Préambule

Soient α un *irrationnel* > 0 et x un réel > 0 . On s'intéresse à la série $\sum \frac{x^n}{\sin(\pi \alpha n)}$.

1.

- Montrer que les termes de cette série sont bien définis pour tout entier naturel $n \geq 1$.
- Montrer que la série diverge pour tout $x \geq 1$.

1^{ère} partie

2. On s'intéresse ici à la suite $\{u_n\}$ définie par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^{u_n}$.

- Montrer que, si $u_0 < \frac{1}{e}$, alors : $u_1 > \frac{1}{e}$.
- Montrer que la suite est convergente pour $0 < u_0 \leq 1$.
- Montrer que la suite tend vers $+\infty$ pour $u_0 > 1$.

3. On se place dorénavant dans le cas $u_0 > 1$.

- Montrer que la série $\sum \frac{1}{u_n}$ est convergente.
- Montrer que : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : u_{N+k} \geq k+2$.
- Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que : $\forall n \geq N : \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{C}{u_{n+1}}$
- En déduire que : $\forall n \geq N : u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{C}{u_n^{u_n-1}}$.

2^{ème} partie

4. On se restreint maintenant au cas où $u_0 \in \mathbb{N}, u_0 \geq 2$. On pose : $\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$ et on admet dans un premier temps que α est *irrationnel*.

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}$.
- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{x^{u_n}}{|\sin(u_n \pi \alpha)|} \geq \frac{1}{\pi C} x^{u_n} u_n^{u_n-1}$
- En déduire que la série $\sum \frac{x^n}{\sin(\pi \alpha n)}$ diverge pour $0 < x < 1$.

5. On va démontrer que le α défini à la question 4 est bien irrationnel. On raisonne par l'absurde en supposant que $\alpha = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : q u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}$.

b) En déduire une contradiction (on fera tendre n vers $+\infty$).

Partie 2 : Probabilités-Statistiques

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants

Exercice 1

Dans tout l'exercice, X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, admettant une densité f nulle sur $] -\infty, 0[$. On suppose que la restriction de f à $[0, +\infty[$ est continue et strictement positive.

On note F la fonction de répartition de X .

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi que X .

On pose $Z_1 = X_1$ et on note Z_2 l'application définie sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z_2(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{si } n \text{ est le plus petit des entiers } k \text{ tels que } X_k(\omega) > X_1(\omega) \\ X_1(\omega) & \text{si un tel entier n'existe pas} \end{cases}$$

On admet que Z_2 est une variable aléatoire, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. (a) Établir, pour tout entier supérieur ou égal à 2 et tout réel t positif, l'égalité suivante :

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{k=2}^n [X_k \leq X_1] \right) \leq (F(t))^n + 1 - F(t)$$

(b) En déduire que, presque sûrement, $Z_2 > Z_1$.

2. On considère dans cette question un couple (x, y) de réels positifs et h un réel strictement positif. On pose :

$$\varphi(x, y) = \mathbb{P}([Z_1 \leq x] \cap [Z_2 - Z_1 > y])$$

(a) Justifier l'égalité suivante :

$$[Z_1 \leq x + h] = [Z_1 \leq x] \cup [x < Z_1 \leq x + h]$$

(b) En déduire que :

$$\varphi(x + h, y) - \varphi(x, y) = \mathbb{P}([x < Z_1 \leq x + h] \cap [Z_2 - Z_1 > y])$$

(c) Établir la formule suivante :

$$\varphi(x + h, y) - \varphi(x, y) = \sum_{j=2}^{+\infty} \mathbb{P} \left([x \leq X_1 \leq x + h] \cap \left[\bigcap_{i=2}^{j-1} [X_i \leq X_1] \right] \cap [X_j > y + X_1] \right)$$

(d) En déduire l'encadrement suivant :

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{1 - F(x)} (1 - F(x + y + h)) \leq \varphi(x + h, y) - \varphi(x, y) \leq \frac{F(x + h) - F(x)}{1 - F(x + h)} (1 - F(x + y))$$

(e) Calculer $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x + h, y) - \varphi(x, y)}{h}$.

(f) En admettant que le résultat précédent soit encore valable quand h tend vers 0 par valeurs inférieures, calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)$ en fonction de f et de F .

3. On suppose dans cette question que X suit la loi exponentielle de paramètre λ .

(a) Montrer, pour tout couple (x, y) de réels positifs, que : $\varphi(x, y) = (1 - e^{-\lambda x})e^{-\lambda y}$.

(b) Déterminer la fonction de répartition de $Z_2 - Z_1$.

(c) Montrer que Z_1 et $Z_2 - Z_1$ sont indépendantes.

Exercice 2 :

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes, $\{Z_i\}$, suivant chacune la loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(1, p_i(\theta))$, où les p_i sont des fonctions de classe C^1 et θ un paramètre réel.

On dispose de n observations de ces variables.

1.

- Donner l'expression de $f_i(q, \theta) = P\{Z_i = q\}$.
- En déduire la *vraisemblance* du modèle dont les observations sont les valeurs de (Z_1, \dots, Z_n) .

On rappelle que la *vraisemblance d'un modèle* dont les observations Z_i sont discrètes, indépendantes et prennent les valeurs q_i , est la fonction :

$$(q_1, \dots, q_n, \theta) \rightarrow L(q_1, \dots, q_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f_i(q_i, \theta).$$

- En déduire l'équation du maximum de vraisemblance pour l'estimation du paramètre θ . On ne cherchera pas à résoudre cette équation.

L'*estimateur du maximum de vraisemblance* de θ , noté $\hat{\theta}_n$, est la quantité (dépendant des q_i) maximisant la vraisemblance (considérée comme dépendant de θ , les q_i étant **fixés**), ou, ce qui est équivalent, son logarithme. Cet estimateur peut être considéré comme une variable aléatoire dont la réalisation est fonction de celles des variables aléatoires Z_i . L'*équation de vraisemblance* est la condition du 1^{er} ordre que doit vérifier cet estimateur (on ne demande pas de vérifier que cette condition caractérise bien un maximum).

2.

- Déterminer les fonctions $p_i(\theta)$ telles que, pour tout θ : $\frac{p'_i(\theta)}{p_i(\theta)[1-p_i(\theta)]}$ soit une constante x_i .
- Que deviennent alors les équations de la question 1 ?

On suppose maintenant qu'on dispose d'une suite de couples de variables aléatoires indépendantes, $\{(Z_i, X_i)\}$, tels que, pour tout i :

- la loi de X_i est une loi discrète définie par : $P\{X_i = x_k\} = \pi_k$ pour $k = 1, \dots, K$, les x_k (deux à deux distincts) et les π_k étant fixés et connus ;
- la loi conditionnelle de Z_i sachant $X_i = x_k$ est une loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(1, p(\theta, k))$, où la fonction $\theta \rightarrow p(\theta, k)$ est de classe C^1 .

- Les équations du maximum de vraisemblance pour l'estimation du paramètre θ sont-elles modifiées dans ce cas par rapport à celles de la question 1 (toujours lorsqu'on dispose de n observations des variables (Z_i, X_i)) ?

4. Pour un couple générique (Z, X) correspondant à une valeur quelconque de l'indice i ci-dessus,

on note :
$$Y = \begin{pmatrix} Z 1_{X=x_1} \\ \vdots \\ Z 1_{X=x_K} \end{pmatrix}.$$

- a) Calculer la matrice de variance-covariance de Y .
 b) On note, pour tout entier naturel n et pour tout entier $k \in \{1, \dots, K\}$:

$$\hat{p}_{k,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i 1_{X_i=x_k}.$$

Pour n fixé, les $\hat{p}_{k,n}$ sont-ils indépendants ?

- c) On note enfin \hat{p}_n le vecteur de composantes $\hat{p}_{k,n}$. Étudier la convergence en probabilité de \hat{p}_n et sa normalité asymptotique quand $n \rightarrow +\infty$.

5. On se place ici dans le cas où : $p(\theta, k) = \frac{1}{1 + e^{-\theta x_k}}$.

- a) Déterminer l'estimateur des moindres carrés ordinaires de θ , soit $\hat{\theta}_n$, dans le modèle linéaire :

$$\ln \frac{\hat{p}_{k,n}/\pi_k}{1 - \hat{p}_{k,n}/\pi_k} = \theta x_k + u_k, k = 1, \dots, K.$$

- b) Pour k fixé, étudier la normalité asymptotique de $\ln \frac{\hat{p}_{k,n}/\pi_k}{1 - \hat{p}_{k,n}/\pi_k}$ quand $n \rightarrow +\infty$.
 c) Étudier la convergence en probabilité de cet estimateur $\hat{\theta}_n$, quand $n \rightarrow +\infty$.
 d) Étudier sa normalité asymptotique.

CONCOURS ADMINISTRATEUR EXTERNE DE L'INSEE

SESSION 2020

COMPOSITION D'ÉCONOMIE

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 2 pages, numérotées de 1 à 2.

Tous documents et appareils électroniques interdits.

Tournez la page S.V.P.

Epreuve écrite d'économie
Durée de l'épreuve : 4h
Tous documents et appareils électroniques interdits

Dissertation (13 points)

Faut-il réformer la gouvernance de la zone euro ?

La dissertation a pour objet de vérifier la capacité des candidats à mobiliser la théorie et les concepts micro- et macroéconomiques afin d'analyser des situations concrètes. Les candidats veilleront ainsi à montrer dans quelle mesure les outils de l'économiste permettent de penser les problèmes économiques actuels, et de leur apporter des solutions.

Exercice (7 points)

L'objet de cet exercice est d'analyser les déterminants de la demande d'assurance d'un agent présentant de l'aversion au risque.

On considère un agent-ménage disposant d'une richesse initiale $W \text{€}$ et face au risque de subir une perte représentée par la variable aléatoire \tilde{X} . La perte ne peut prendre que 2 valeurs : soit $\tilde{X} = X \text{€}$ (avec $X < W$) avec une probabilité d'occurrence égale à Π , soit $\tilde{X} = 0 \text{€}$ avec la probabilité complémentaire. L'agent a la possibilité de s'assurer (partiellement ou complètement suivant les configurations considérées ci-dessous) moyennant le versement d'une prime d'assurance, notée $P \text{€}$ en cas d'assurance complète. L'approche est statique et l'agent consomme l'intégralité de la richesse nette (du dommage, de l'éventuelle prime d'assurance payée, ainsi que de l'éventuelle indemnisation reçue). On ne distinguera pas entre grandeurs nominales et réelles.

On note $u(C)$ l'utilité retirée de la consommation de $C \text{€}$. On suppose par ailleurs que les préférences de l'agent face au risque sont telles qu'elles peuvent être représentées par l'utilité espérée, et que l'agent présente de l'aversion au risque.

1. Qu'est-ce que l'aversion au risque ? A quelle condition sur la fonction d'utilité $u(C)$ l'agent présente-t-il de l'aversion au risque ?
2. En l'absence d'assurance, quelles sont les situations postérieures à la réalisation de l'aléa dans lesquelles l'agent peut se trouver, et que vaut sa richesse nette dans chacune d'entre elles ? Ecrivez alors l'utilité espérée en absence d'assurance.
3. Si l'agent paye la prime d'assurance complète P , il est intégralement indemnisé en cas de dommage subi. Quelle est dans ce cas l'expression de son utilité espérée ?
4. Déduisez-en la condition pour laquelle l'agent est prêt à payer la prime d'assurance complète P (l'alternative étant l'absence d'assurance).
5. On suppose dans cette question que la fonction d'utilité s'écrit

$$u(C) = -\frac{1}{C}$$

Cette fonction donne-t-elle lieu à de l'aversion au risque? Réécrivez la condition obtenue à la question 4 avec cette fonction d'utilité, et montrez que la prime maximale que l'agent est prêt à payer a pour expression :

$$P_{max} = \frac{\Pi W X}{W - (1 - \Pi) X}$$

6. Que vaut l'espérance de perte $E(\tilde{X})$? Comparez P_{max} à $E(\tilde{X})$ et expliquez soigneusement.

On suppose à partir de cette question et jusqu'à la fin de l'exercice, que l'utilité a pour expression :

$$u(C) = -e^{-C}$$

7. Sans chercher à calculer explicitement P_{max} , mais en vous fondant sur des raisonnements, sur des calculs simples et éventuellement sur une construction graphique, la prime maximale que l'agent serait prêt à payer est-elle supérieure ou inférieure à l'espérance de perte?

On considère ici que l'agent a accès à la co-assurance. Il s'agit d'une assurance partielle. L'agent choisit librement le degré de co-assurance, noté α avec $0 \leq \alpha \leq 1$. La prime d'assurance payée vaut alors αP , avec P la prime d'assurance complète, et l'indemnisation reçue ne couvre que la fraction α du dommage, soit une indemnisation $I = \alpha X$.

8. Posez le programme de l'agent choisissant α compris entre 0 et 1, et montrez que le niveau optimal de co-assurance, α^* , a pour expression (hors solutions en coin) :

$$\alpha^* = 1 + \frac{1}{X} \left(\ln \left(\frac{\Pi}{1 - \Pi} \right) + \ln \left(\frac{X - P}{P} \right) \right)$$

9. Que vaut α lorsque la prime payée est exactement égale à l'espérance de perte? Lorsque la prime payée est strictement supérieure à l'espérance de perte? Comment évolue le degré de co-assurance optimal, à mesure que la prime payée s'élève? Expliquez.