

## Moyennes mobiles asymétriques minimisant le déphasage

---

Fabien Guggemos  
INSEE - Département des statistiques de court terme



Journées sur la Correction de la Saisonnalité 2011 - Paris



## Contexte (1)

---

Méthodes de désaisonnalisation, d'extraction de cycle... Reposent essentiellement sur des filtres linéaires:

Filtre de Wiener-Kolmogorov (Tramo-Seats), moyennes mobiles (X12) ....

Problème des fins de séries... → Impossibilité d'utiliser "formellement" des filtres symétriques sur les points les plus récents

- Filtres asymétriques
- Filtres symétriques sur séries prolongées dans le futur par des modèles de prévision ≈ Filtres asymétriques

Beaucoup d'études dans la littérature pour générer des filtres asymétriques "optimaux" (minimisation des révisions...)

*Musgrave, 1964; Dagum, 1975; Wallis, 1981; Ladiray, Grun-Rehomme, 1994; Gray, Thompson, 1996, Dagum et al, 2008 ; Proietti, Luati, 2007*

...



Journées sur la Correction de la Saisonnalité 2011 – Paris – Fabien Guggemos

## Contexte (2)

**Problème : les filtres asymétriques introduisent des déphasages...**

Objectif : produire des moyennes asymétriques minimisant le déphasage (pour X12 notamment, recherche pour Eurostat)

→ Pour mieux estimer en temps réel les points de retournement de l'économie par ex.

En réalité, 2 approches développées simultanément avec objectifs similaires (déphasage):

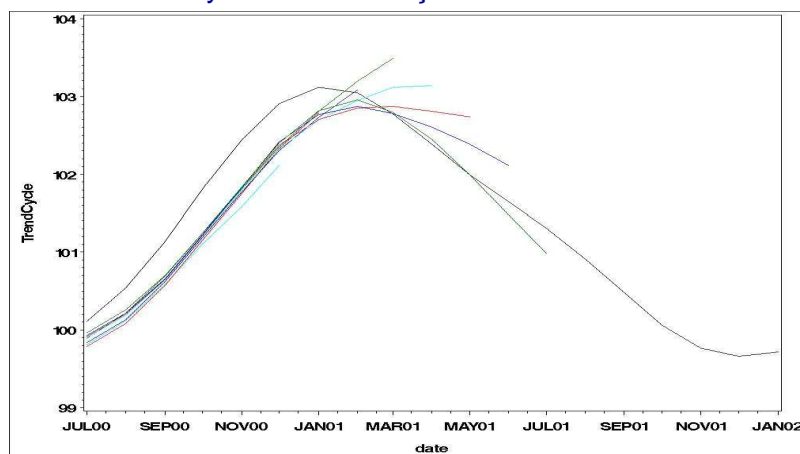
- Filtres paramétriques indépendants des données,  
(Grun-Rehomme M., Guggemos F., Ladiray D.)
- Filtres non-paramétriques dépendants des données,  
(DFA Généralisé, Wildi M.)

Comparaison des 2 approches ⇒ Lien théorique ⇒ Cadre général théorique unifié, englobe aussi filtres classiques (Musgrave, Henderson, Hodrick-Prescott,...)



## Un exemple concret...

Tendance-cycle de l'IPI français obtenu avec X11



## Plan

---

- Quelques rappels sur les Moyennes Mobiles (MM)
  - Effets liés aux fonctions de gain et de phase
  - Qu'est ce qu'une "bonne" moyenne mobile?
  - "Fidelity" & "Smoothness" : MM de Bongard et Henderson
  - Révisions : MM de Musgrave
- Un cadre général théorique unifié pour les filtres considérés
- Le critère "Timeliness"
  - L'approche "DFA généralisé" pour isoler les effets de phase
  - MM asymétriques :
    - Comment définir un critère pertinent pour mesurer le déphasage ?
    - Vers un critère conciliant plusieurs objectifs ?
- Quelques résultats empiriques



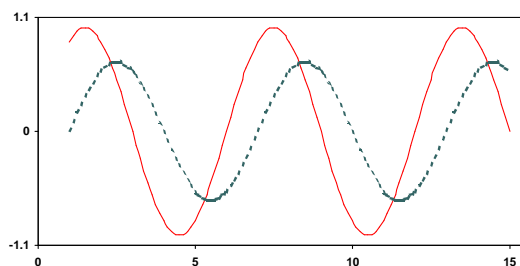
## Gain et phase par l'exemple...

---

Une série trigo toute simple :  $X_t = \sin\left[\frac{\pi}{3}t\right]$

Une moyenne mobile asymétrique :

$$MX_t = \frac{1}{3}[X_{t-2} + X_{t-1} + X_t] = \frac{2}{3\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3}(t-1)\right)$$



L'estimation des dates des points de retournement est erronée, en particulier...



## Fonctions de gains et de phases

---

Pour  $Y_t$  série temporelle de fréquence  $\omega$ , d'amplitude  $a$ ,

$$Y_t = ae^{i\omega t} = a[\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)]$$

$$Y_t^* = M(Y_t) = \sum_{k=-p}^{k=+f} \theta_k [ae^{i\omega(t+k)}] = ae^{i\omega t} \sum_{k=-p}^{k=+f} \theta_k e^{i\omega k} = Y_t \underbrace{[\rho_\theta(\omega) e^{i\varphi_\theta(\omega)}]}_{=M_\theta(e^{i\omega})}$$

$\rho_\theta(\omega)$  module

de la fonction de transfert  $M_\theta(e^{i\omega})$

$\varphi_\theta(\omega)$  phase



## Choisir une “bonne” moyenne mobile

---

Décomposition simple de série temporelle

$$X_t = TC_t + S_t + \varepsilon_t$$

Des MM préservant la tendance, supprimant la saisonnalité et les composantes irrégulières ?

$$\begin{aligned} MX_t &= M[TC_t + S_t + \varepsilon_t] \\ &= M[TC_t] + M[S_t] + M[\varepsilon_t] \approx TC_t + 0 + 0 \end{aligned}$$

Quels critères pour déterminer des MM préservant des tendances linéaires, polynômiales..., supprimant des saisonnalités mensuelles, trimestrielles..., et réduisant au maximum le bruit résiduel ?



## Préservation des tendances

### Exemple très simple : préservation des constantes

Si on considère une série  $X_t = a$  et une moyenne mobile M :

$$M[X_t] = \sum_{i=-p}^{i=+f} \theta_i X_{t+i} = a \sum_{i=-p}^{i=+f} \theta_i \quad \text{et} \quad M[X_t] = X_t \Leftrightarrow a \sum_{i=-p}^{i=+f} \theta_i = a \Leftrightarrow \sum_{i=-p}^{i=+f} \theta_i = 1$$

Les coefficients doivent simplement se sommer à 1

Plus généralement, pour préserver des polynômes de degré  $d$ , les coefficients de la moyenne mobile doivent satisfaire des contraintes **linéaires** :

$$\sum_{i=-p}^{i=+f} \theta_i = 1 \quad \text{and} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, d\} \quad \sum_{i=-p}^{i=+f} i^k \theta_i = 0$$



## Supprimer la saisonnalité

Encore un petit exemple ... Une moyenne mobile d'ordre  $k$  (coeffs tous égaux à  $1/k$ ) supprime les saisonnalités fixes de période  $k$

→ Fonction de gain valant 0 à la fréquence  $2\pi/k$ .

Plus généralement, il est possible de traiter le cas de saisonnalités fixes ou variant linéairement (et même polynômalement) avec le temps. Il suffit d'imposer des contraintes spécifiques **linéaires** sur les coeffs des MM

(cf Ladiray, Grun-Rehomme (1994))



## Réduire la composante irrégulière

---

Pour une composante résiduelle irrégulière modélisée simplement par un bruit blanc,  $\varepsilon_t$ , (moyenne nulle, variance  $\sigma^2$ , décorrélé)...

Transformation par une moyenne mobile en un processus stationnaire (autocorrélé),  $(\varepsilon_t^*)$ , de variance

$$\sigma^{*2} = \sigma^2 \sum_{i=-p}^{i=+p} \theta_i^2$$

→ Pour réduire la composante irrégulière / sa variance, idée : Minimiser la somme des carrés des coeffs .

Critère de Fidélité de Bongard : F (Fidelity)



## Exemple de moyenne de Bongard

---

Si l'on cherche une MM symétrique d'ordre  $2p+1$  préservant les constantes et minimisant le bruit résiduel...

$$\begin{cases} \text{Min}_{\theta} \sum_{i=-p}^{i=+p} \theta_i^2 \\ \sum_{i=-p}^{i=+p} \theta_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \theta_i = \frac{1}{2p+1}$$

Ici, on obtient la MM la plus simple qui soit ! Et qui de surcroît préserve naturellement les tendances linéaires et supprime les saisonnalités d'ordre  $2p+1$ , sans que l'on ait eu à imposer les contraintes correspondantes dans le programme d'optimisation



## Les moyennes mobiles de Henderson

Henderson propose un autre critère,  
Critère de lissage de Henderson : S (Smoothness)

$$S = \sum (\nabla^3 \theta_i)^2$$

Les moyennes mobiles de Henderson sont les solutions du programme :

$$\begin{cases} \text{Min}_{\theta} \sum (\nabla^3 \theta_i)^2 \\ \sum_{i=-p}^{i=f} \theta_i = 1, \quad \sum_{i=-p}^{i=f} i \theta_i = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=-p}^{i=f} i^2 \theta_i = 0 \end{cases}$$

Elles préservent les tendances polynômiales de degré 0,1 et 2 (et 3 pour les moyennes symétriques ( $p=f$ ))



## Les moyennes mobiles de Musgrave

Minimiser l'espérance des révisions, écart entre...

- Signal "réel" filtré par une MM asymétrique  $M_{\theta}$ , vecteur de coeffs  $\theta$   
*la MM s'applique aux seuls points présent et passés de la série.*
- Signal prolongé dans le futur par un modèle, filtré par une MM symétrique  $M_w$ , vecteur de coeffs  $w$   
*la MM s'applique aux points présent et passés de la série mais aussi à des prédictions des points futurs.*

... sous des modélisations de fins de séries standards  
(tendance linéaire, bruit blanc)

(aisément généralisables; tendance polynômiale, composante saisonnière...)



## Un cadre général théorique unifié (1)

Une première généralisation : tous les problèmes mentionnés jusqu'ici sont de la forme...

$$\begin{cases} \underset{\theta}{\text{Min}} (\theta - w)' \Omega (\theta - w) \\ \text{with } C\theta = \alpha \end{cases}$$

On connaît la solution analytique ! (*Optim quadratique sous contraintes linéaires*)

$$\theta = \Omega^{-1} C' (C \Omega^{-1} C')^{-1} (\alpha - C w) + w$$

Exemple :

Pour le critère "Fidelity",  $\Omega$  = matrice identité,  $w=0$

Pour Musgrave,  $\Omega$  = Matrice de variance du bruit résiduel

...



## Un cadre général théorique unifié (2)

Plus généralement ...

$$\begin{cases} \underset{\theta}{\text{Min}} E(\nabla^k (\theta' X_t - u_t))^2 \\ \text{with } C\theta = \alpha \end{cases}$$

Sous les modèles usuels et des contraintes adéquates (saisonnalité, etc), on retrouve les critères précédents

$$u_t = E(\theta' X_t) \rightarrow \text{Fidelity (k=0), Smoothness (k=3)}$$

$$u_t = w' X_t \rightarrow \text{Musgrave (k=0)}$$

Quand on relâche certaines hypothèses de modélisation, on obtient **une classe plus large de filtres linéaires**, pouvant éventuellement dépendre des données à analyser

→ Approche de *Wildi* : DFA (Direct Filter Approach) généralisé





## Vers l'approche "DFA généralisé" (Wildi) (1)

**Généralisation du cas Musgrave** :  $u_t = w' X_t$ ,  $k=0$ , avec une hypothèse plus faible : l'écart mesurant les révisions est un processus stationnaire.

"Traduction" du critère à minimiser dans le domaine fréquentiel :

$$E(\theta' X_t - w' X_t)^2 = \int_0^{2\pi} |M_\theta(e^{i\omega}) - M_w(e^{i\omega})|^2 dH_X(\omega)$$

→ L'approche DFA (M. Wildi) consiste précisément à chercher le filtre linéaire dont la fonction de transfert  $M_\theta(e^{i\omega})$  minimise (une estimation non-paramétrique de) cette intégrale.

Le filtre dépend des données à travers de la densité spectrale  $H_X$  de la série  $X_t$



## Vers l'approche "DFA généralisé" (Wildi) (2)

→ Permet d'isoler les effets de gains des effets de phase...

$$\begin{aligned} |M_\theta(e^{i\omega}) - M_w(e^{i\omega})|^2 = \\ \underbrace{(\rho_\theta(\omega) - \rho_w(\omega))^2}_{\text{Effet de Gain}} + \underbrace{4\rho_w(\omega)\rho_\theta(\omega)\sin^2(\varphi_w(\omega)/2)}_{\text{Effet de Phase}} \end{aligned}$$

→ DFA généralisé : pondérer différemment l'effet de phase par rapport à l'effet de gain dans le critère de minimisation. Pondérations suggérées par M. Wildi conduisent au critère "amélioré" :

$$E(\theta' X_t - w' X_t)^2 + \lambda \cdot \int_0^{2\pi} \rho_w(\omega) \cdot \Im m^2(M_\theta(e^{i\omega})) dH_X(\omega)$$



## Moyennes Mobiles : un critère pertinent pour le déphasage ? (1)

Première idée : minimiser "brutalement" la fonction de phase (en fait sa valeur absolue)

$$\varphi_{\theta}(\omega) = \text{Arg} \left\{ \sum_{k=-p}^{k=+f} \theta_k e^{i\omega k} \right\} = 2 * \text{Arctg} \left( \frac{\sum_{k=-p}^{k=+f} \theta_k \sin(k\omega)}{\rho_{\theta}(\omega) + \sum_{k=-p}^{k=+f} \theta_k \cos(k\omega)} \right)$$

Mais...

À minimiser sur une bande de fréquence (celle du cycle des affaires)

Le critère n'est pas convexe...

... a une expression complexe (problèmes de résolution numérique)

Et ... pas nécessairement de solution unique !



## Moyennes Mobiles : un critère pertinent pour le déphasage ? (2)

Deuxième idée : Minimiser une fonction en apparence plus complexe...

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f[\rho_{\theta}(\omega), \varphi_{\theta}(\omega)] d\omega$$

Où f (fonction de pénalisation) satisfait des contraintes garantissant l'optimalité des solutions... et même plus...

$$f \geq 0 \quad f[\rho, 0] = 0 \quad f[0, \varphi] = 0 \quad f[\rho, \varphi] = f[\rho, -\varphi]$$

$$\partial f / \partial \rho \geq 0 \quad \varphi \times (\partial f / \partial \varphi) \geq 0 \text{ près de } 0.$$

Malheureusement, le seul critère de déphasage ne fournira jamais de solution unique (si  $p \geq f$ , les MM "symétriques" admissibles ( $\theta_{-p} = \theta_{-p+1} = \dots = \theta_{-f-1} = 0$  et  $\theta_{-i} = \theta_i$  pour  $|i| \leq f$ ) ne produisent aucun déphasage)



## Un premier critère “Timeliness”

---

Un premier critère intéressant

$$T(\theta) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \rho_{\theta}(\omega) \sin^2[\varphi_{\theta}(\omega) / 2] d\omega$$

Le critère est convexe à présent (mais pas strictement)

Son gradient est calculable

→ Problème d’optim. convexe : On sait résoudre à l’aide d’algorithmes numériques convergents (méthode du gradient, Newton...)

Mais... pas de solution analytique



## Un second critère “Timeliness”

---

Un critère adéquat et très pratique (testé lors de simulations)

$$\begin{aligned} T(\theta) &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \rho_{\theta}^2(\omega) \sin^2[\varphi_{\theta}(\omega)] d\omega \\ &= \sum_{k=-p}^{+f} \sum_{l=-p}^{+f} \theta_k \theta_l \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin(k\omega) \sin(l\omega) d\omega \end{aligned}$$

Le critère est désormais une forme quadratique ! ... mais, comme prévu, singulière (pas de solution unique, forme d’ordre  $p+f+1$ , de rang  $p$ )



## Un critère composite pour concilier les objectifs

Concilier les objectifs "Fidelity", "Smoothness", "Timeliness" (on pourrait inclure les révisions) en prenant une combin. convexe des trois critères

→ Critère FST, cette fois-ci strict. Convexe (D'où unicité de la solution)

$$\begin{cases} \text{Min}_{\theta} \theta' [\alpha F + \beta S + \gamma T] \theta \\ \text{with } C\theta = \alpha \end{cases}$$

Pour  $\beta=0$ , on retrouve l'analogue - pour des filtres ne dépendant pas des données - du DFA généralisé.



## Quelques résultats empiriques $\alpha=0, \beta=1$ et $\gamma=1000, (0:\pi/6)$

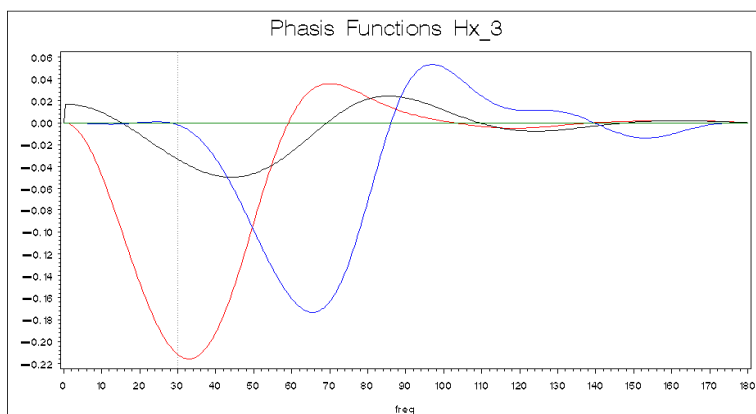
Hx<sub>i</sub>: MM asymétrique avec i points dans le futur (ordre 13)

TypeMA	Criteria	Hx_0	Hx_1	Hx_2	Hx_3	Hx_4	Hx_5	H_6_6
Henderson	Fidelity	0,985	0,494	0,258	0,176	0,173	0,193	0,204
Musgrave	Fidelity	0,388	0,268	0,201	0,181	0,188	0,199	
Phase-Shift	Fidelity	1,047	0,416	0,407	0,354	0,272	0,230	
Henderson	Smoothness	0,169	0,071	0,023	0,005	0,003	0,007	0,008
Musgrave	Smoothness	1,272	0,433	0,080	0,010	0,021	0,017	
Phase-Shift	Smoothness	2,403	0,229	0,166	0,134	0,053	0,018	
Henderson	Timeliness	0,116	0,015	0,003	0,005	0,007	0,003	0
Musgrave	Timeliness	0,260	0,286	0,263	0,198	0,121	0,039	
Phase-Shift	Timeliness	2 <sup>E-5</sup>	0	1 <sup>E-6</sup>	0	0	0	



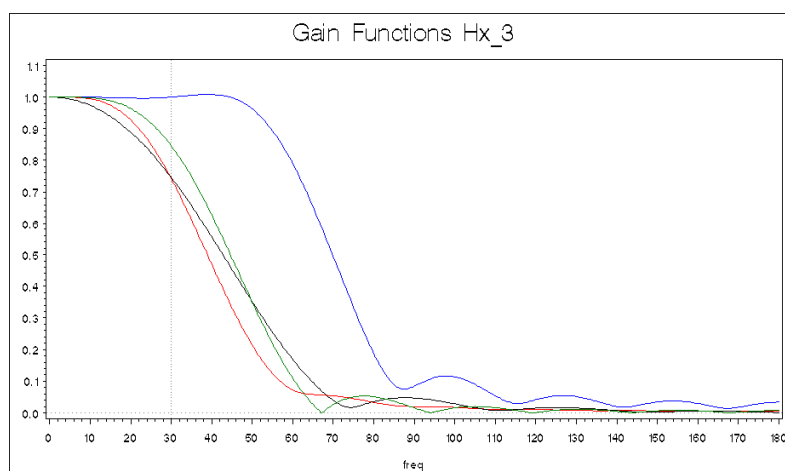
## Moyennes Mobiles Hx\_3 : Fonctions de Phase

Vert: Henderson symétrique, Rouge: Henderson asymétrique,  
Noir: Musgrave, Bleu: Timeliness



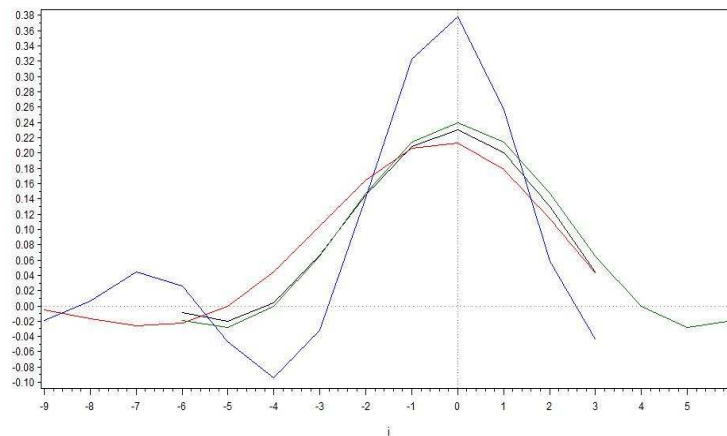
Journées sur la Correction de la Saisonnalité 2011 – Paris – Fabien Guggemos

## Moyennes Mobiles Hx\_3 : Fonctions de Gain

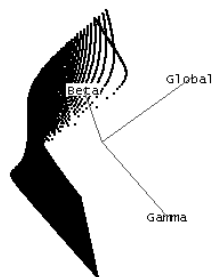


Journées sur la Correction de la Saisonnalité 2011 – Paris – Fabien Guggemos

## Moyennes Mobiles Hx\_3 : Coefficients



## Moyennes Mobiles Hx\_3 : Critère global



La pondération optimale des différents critères est difficile à estimer. Qualité des séries filtrées très sensible au choix de ces pondérations → problèmes à régler  
Macro SAS (D. Ladiray)



---

# Merci de votre attention !

Contact  
M. Fabien Guggemos  
Tél. : 00 33 1 41 17 50 18  
Mail : fabien.guggemos@insee.fr

## **Insee**

18 bd Adolphe-Pinard  
75675 Paris Cedex 14

[www.insee.fr](http://www.insee.fr)  

Informations statistiques :  
[www.insee.fr](http://www.insee.fr) / Contacter l'Insee  
09 72 72 4000  
(coût d'un appel local)  
du lundi au vendredi de 9h00 à 17h00

